ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 4 :: August 1924

:: Heft 4 :: Seite 277 bis 360

INHALT:

HAUPTAUFSÄTZE:

BIRNBAUM, Das ebene Problem des schlagenden Flügels / SCHUMACHER, Über die Wasserströmung in einem mit Stichkanälen versehenen Umlaufkanal bei Kammerschleusen / DUFFING, Beitrag zur Theorie der Flüssigkeitsbewegung zwischen Zapfen und Lager / SCHWERDT, Das Prinzip der Gleitkurven, ein neues Darstellungsmittel / HENCKY, Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen / WEBER, Biegung und Schub in geraden Balken

KLEINE MITTEILUNGEN

BUCHBESPRECHUNGEN

NACHRICHTEN



V*D*I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN SW 19

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 4 Ende August 1924 Heft 4

Inhalt:

Seite

Hauptaufsätze. W. Birnbaum: Das ebene Problem des schlagenden Flügels 277
B. Schumacher: Ueber die Wasserströmung in einem mit Stichkanälen versehenen Umlaufkanal bei Kammerschleusen 292
G. Duffing: Beitrag zur Theorie der Flüssigkeitsbewegung zwischen Zapfen und Lager . . . 296
H. Schwerdt: Das Prinzip der Gleitkurven, ein neues Darstellungsmittel 314
H. Hencky: Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen 323
C. Weber: Biegung und Schub in geraden Balken 334
Kleine Mitteilungen. Brauer: Einfache Konstruktion der Beschleunigung. — Gumbel: Eine Eigenschaft der Sterbetafel. — Fischer: Beitrag zur Nomographie 348

Seite

Buchbesprechungen. Rüdenberg: Elektrische Schaltvorgänge und verwandte Störungserscheinungen in Starkstromanlagen — Cranz, Kammerer: Versuche mit Zahnrädern von Straßenbahnwagen. — Markmann: Versuche mit schnellaufenden Riemenscheiben. — Föppl: Grundzüge der Festigkeitslehre. — Bieberbach: Theorie der Differentialgleichungen. — Onnen: Kreisevolventen und ganze algebraische Funktionen. — Goldmann: Anleitung zum Gebrauch des Zweiskalen und Dreiskalen-Rechenschiebers. — Lorenz: Einführung in die Elemente der höheren Mathematik und Meschanik. — Valentiner: Vektoranalysis. — Happach: Ausgleichrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. — Geibel: Ueber die Wasserrückkühlung mit selbstventilierendem Turmkühler 358
Nachrichten 359

HAUPTAUFSÄTZE

Das ebene Problem des schlagenden Flügels.

Von **WALTER BIRNBAUM** in Berlin. [1])

Im Anschluß an meinen Aufsatz über die tragende Wirbelfläche [2]) der die wesentliche Grundlage der folgenden Untersuchungen bildet, will ich darlegen, wie die dort entwickelten Methoden auch geeignet sind, die Luftkräfte für einen Flügel mit zeitlich veränderlicher Zirkulation zu erfassen. Speziell werde ich die Theorie eines nach Art eines Vogelflügels periodisch auf und ab schlagenden Triebflügels entwickeln. Ich werde zeigen, wie sich der Auftrieb und sein Moment als Funktion der Schlagbewegung ergibt, welcher Vortrieb sich erzielen läßt, und wie groß der Wirkungsgrad dieses Schlagpropellers ist, wenn man von der Luftreibung absieht. Zum Schluß werde ich einen interessanten Fall dynamischer Instabilität bei einem federnd aufgehängten Flügel behandeln, eine Erscheinung, die durch Versuche in der Göttinger aerodynamischen Versuchsanstalt bestätigt wurde. Herr Prof. Prandtl gab mir die Anleitung zu der vorliegenden Arbeit, und ich möchte nicht verfehlen, ihm auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank für die reichen Anregungen und die tatkräftige Beihilfe, die er mir jederzeit zuteil werden ließ, auszusprechen.

1. Allgemeiner Ansatz. Die Rechnungen beziehen sich wieder auf das zweidimensionale Problem, d. h. auf den unendlich langen oder durch ebene Seitenwände begrenzten Flügel, oder auf einen Flügel mit so großem Seitenverhältnis, daß der Randeinfluß zu vernachlässigen ist. Im übrigen gelten dieselben Voraussetzungen über Kleinheit der Luftkräfte, schwache Krümmung des Flügels usw., wie im ersten Aufsatze. Der Flügel erstrecke sich von $x = -\,^1/_2$ bis $x = +\,^3/_2$, sodaß der Punkt $x = 0$ zum Druckmittelpunkt eines ebenen Flügels mit festem Anstellwinkel wird. v, in Richtung der positiven X-Achse, sei die Luftgeschwindigkeit in der Ferne. Die positive Y-Achse weise nach unten. Mit $\gamma = \gamma(x, t)$ bezeichne ich die nunmehr von der Zeit abhängige Dichte der tragenden Wirbel. Bei jeder zeitlichen Aenderung der Zirkulationsdichte werden

[1]) Auszug aus der gleichnamigen Göttinger Dissertation 1922. Erhältlich in der Universitätsbibliothek zu Göttingen und in der Staatsbibliothek zu Berlin. Referent: Prof. Prandtl.

[2]) Diese Zeitschrift 3, 1923, S. 290 bis 297.

sich freie Wirbel mit der Dichte $\varepsilon(x, t)$ von den tragenden Wirbeln ablösen und mit dem Luftstrome wegschwimmen. Auf Grund des Satzes von der Erhaltung der Zirkulation oder auch durch Integration der Eulerschen Differentialgleichung einmal längs der Druck- und einmal längs der Saugseite des Flügels (vergl. hierzu die ungekürzte Arbeit) findet man leicht, daß die Wirbel an jeder Stelle und zu jeder Zeit die folgende Kontinuitätsgleichung der Wirbeldichte erfüllen müssen [1]):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Im allgemeinen wird man über $\gamma(x, t)$ passende Annahmen machen, sodaß aus der Gleichung ε zu finden ist. Bezeichnen wir $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ mit $\dot{\gamma}(x, t)$, so ist ihr Integral:

$$\varepsilon(x, t) = -\frac{1}{v} \int\limits_{\varphi(x - vt)}^{x} \dot{\gamma}\left(\xi, t + \frac{\xi - x}{v}\right) d\xi \quad \ldots \ldots \ldots (2),$$

wo φ eine durch Randbedingungen zu bestimmende, willkürliche Funktion ist. Hat man so ε gefunden, so ergibt sich die induzierte Vertikalgeschwindigkeit in erster Näherung als Hauptwert des Integrals:

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma + \varepsilon}{x - \xi} d\xi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3),$$

w ist nun ähnlich wie früher mit der bewegten Flügelkontur in Beziehung zu setzen. Wird die Bewegung des Flügels durch den Wert der Ordinate an der Stelle x, also durch $y = y(x, t)$ angegeben (durch diesen Ansatz ließe sich auch ein bewegter und sich gleichzeitig deformierender Flügel erfassen), so lautet die kinematische Grenzbedingung:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} = w(x, t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4).$$

Das ist die Gleichung aus der Kontur und Bewegung des Flügels gewonnen werden, wenn γ und damit w vorgegeben ist. Analog wie oben ist nämlich:

$$y = \frac{1}{v} \int\limits_{\psi(x - vt)}^{x} w\left(\xi, t + \frac{\xi - x}{v}\right) d\xi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Wenn man bedenkt, daß die Relativgeschwindigkeit der Luft zur tragenden Wirbellinie die Komponenten v und $w - \frac{\partial y}{\partial t}$ hat, so ergeben sich wie früher die Luftkräfte für die Längeneinheit des Flügels:

$$K = \varrho v \int\limits_{-1/2}^{1^1/_2} \gamma \, dx \quad \ldots (6a), \qquad M = \varrho v \int\limits_{-1/2}^{1^1/_2} \gamma x \, dx \quad \ldots (6b),$$

$$W = \varrho \int\limits_{-1/2}^{1^1/_2} \gamma \left(w - \frac{\partial y}{\partial t}\right) dx - \varrho \pi \frac{a^2}{2} = \varrho v \int\limits_{-1/2}^{1^1/_2} \gamma \frac{\partial y}{\partial x} dx - \varrho \pi \frac{a^2}{2} \quad \ldots (7).$$

Das letzte Glied in W stellt, wie in meinem ersten Aufsatz, die Saugkraft an der Flügelvorderkante dar, natürlich jetzt mit zeitlich veränderlichem Koeffizienten a der ersten Grundfunktion.

2. Periodische Flügelbewegung. Von diesen allgemeinen Ausdrücken gehe ich nun dazu über, das spezielle Problem des schlagenden Flügels zu behandeln. Es ist zu erwarten, daß γ in diesem Falle selbst bis auf einen konstanten Mittelwert periodisch sein wird. Ich bestimme also zunächst aus dem Ansatz

$$\gamma = \gamma_0(x) e^{i\nu t} = \gamma_0 e^{i\omega v t} = \gamma_0 e^{\omega' v t} \quad \ldots \ldots \ldots (8)$$

[1]) Genaueres über die Ableitung dieser Gleichung findet man in einem Vortrag von Prandtl »Ueber Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit« auf der hydro-aerodynamischen Konferenz zu Innsbruck 1922 (Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik, herausgegeben von Th. v. Kármán und T. Levi-Civita, Berlin 1924) sowie in der zitierten Originalarbeit.

die freien Wirbel ε; denn $\dot{\gamma}$, das allein in ε eingeht, ist unabhängig von dem konstanten Mittelwert $\bar{\gamma}$, sodaß dieser Ansatz allgemein genug ist. Dabei ist stillschweigend, wie in der Schwingungslehre üblich, von γ der imaginäre Bestandteil zu nehmen. ν ist die Kreisfrequenz der Schwingung, $\omega = \frac{\nu}{v}$ eine dimensionslose Größe, die ich »reduzierte Frequenz« nenne (v hat die Dimension einer Winkelgeschwindigkeit, denn es ist gleich der Fluggeschwindigkeit, gemessen an der halben Flügeltiefe als Längeneinheit). Bezeichnet man als »Wellenlänge« λ den Luftweg des Flügels nach einer vollen Periode, so ist

$$\lambda = 2\pi \frac{\nu}{v} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Die weiteren Ergebnisse werden durch Reihenentwicklungen nach der reduzierten Frequenz ω gewonnen, welche die Form

$$\Sigma c_{mn}\, \omega^m (\log \omega)^n, \qquad m \geq n$$

haben. Diese Reihen konvergieren nur gut für kleine ω bis etwa $\omega = 0{,}1$ entsprechend einer Wellenlänge von 30 Flügeltiefen oder mehr. Ich setze daher für die vorliegende Arbeit langsame, quasi-stationäre Schwingungen des Flügels voraus, womit natürlich nicht gesagt ist, daß die wirkliche Frequenz ν nicht auch große Werte annehmen kann, wenn nur die Flügeltiefe klein genug ist. Rechne ich schließlich noch mit $\omega' = i\,\omega$, so erhalten die Formeln wenigsten äußerlich reelle Koeffizienten, was für die Rechnung viele Vorteile bietet.

Ich nehme nun an, daß vor dem Flügel wirbelfreie parallele Strömung herrscht. Dann erhalte ich mit $\bar{x} = x - {}^1/_2$ für ε und w, unter der Voraussetzung, daß der »Einschaltvorgang« der Flügelbewegung schon abgelaufen, diese also stationär geworden ist, die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon = 0; && \bar{x} < -1; \\ &\varepsilon = \varepsilon_\alpha = \omega' e^{\omega'(vt-\bar{x})} \int_{\bar{x}}^{-1} e^{\omega'\bar{\xi}}\, \gamma_0(\bar{\xi})\, d\bar{\xi}; && -1 \leq \bar{x} \leq 1 \\ &\varepsilon = \varepsilon_\beta = \omega' e^{\omega'(vt-\bar{x})} \int_{1}^{-1} e^{\omega'\bar{\xi}}\, \gamma_0(\bar{\xi})\, d\bar{\xi}; && \bar{x} \geq 1 \end{aligned}\right\} \quad . \;.\;.\;.\; (9);$$

$$2\pi\, w(\bar{x}, t) = \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\bar{\xi}, t)}{x - \bar{\xi}}\, d\bar{\xi} + \int_{-1}^{+1} \frac{\varepsilon_\alpha(\bar{\xi}, t)}{\bar{x} - \bar{\xi}}\, d\bar{\xi} + \int_{1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\beta(\bar{\xi}, t)}{\bar{x} - \bar{\xi}}\, d\bar{\xi} \quad . \;.\;.\; (10).$$

Wie in meinem ersten Aufsatze, bestimme ich $\gamma_0(x)$ aus den 3 ersten Grundfunktionen[1])

$$\gamma_0 = a\,\gamma_{0a} + b\,\gamma_{0b} + c\,\gamma_{0c},$$

wo jetzt a, b, c komplexe Zahlen sind. Es ist dann auch

$$w = w_0\, e^{\omega' v t}, \qquad w_0 = a\, w_{0a} + b\, w_{0b} + c\, w_{0c}.$$

Die Integrale (9) und (10) lassen sich nicht durch elementare Funktionen auswerten. Das letzte Integral (10) führt insbesondere auf einen Integrallogarithmus. Die Eulersche Konstante C, die infolgedessen auftritt, kommt stets in Verbindung mit log 2 vor, sodaß ich als transzendente Zahl

$$Z = \log 2 - C = 0{,}11593\;.\;.\;.$$

für die vorliegende Arbeit besonders einführen will. Berücksichtigt man dies, so erhält man die w in der Form

$$w_{0a} = \alpha_0 + \alpha_1\,\omega' + \alpha_2\,\omega' \log \omega' + \alpha_3\,\omega'^2 + \alpha_4\,\omega'^2 \log \omega' + \alpha_5\,\omega'^3 + \alpha_6\,\omega'^3 \log \omega' \quad (11)$$

und entsprechende Ausdrücke mit β_i und γ_i gelten für w_{0b} und w_{0c}. Die Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sind Polynome in x, deren Koeffizienten linear und rational in Z sind (über ihre

[1]) Es ist $\gamma_{0a} = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $\gamma_{0b} = \sqrt{1-x^2}$, $\gamma_{0c} = x\sqrt{1-x^2}$.

Werte vergleiche die Originalarbeit). Das Auftreten von $\log \omega'$ zeigt im übrigen, daß eine Behandlung der Aufgabe mit einer tragenden Linie an Stelle der tragenden Fläche versagen muß, da dem Uebergang zur tragenden Linie ein Uebergang zu $\omega' = 0$ entspricht (v wächst beliebig bei abnehmender Flügeltiefe). Deshalb ist die hier vorgebrachte Theorie des schlagenden Flügels die einfachst mögliche.

Es handelt sich nun, unter Umgehung des Integrals für y, darum, die Flügelbewegung in geeigneter Weise festzulegen und mit dem Ansatz für γ in Einklang zu bringen. Da die Methoden der tragenden Wirbelfläche linear sind, und da eine Deformationsschwingung nicht berücksichtigt werden möge, so kann man von der Gestalt und dem mittleren Anstellwinkel des Flügels absehen. Es genügt dann nämlich, die Schwingungen eines ebenen Flügels mit dem mittleren Anstellwinkel 0 zu berechnen und diese dem beliebig gegebenen Profil als kleine, zeitliche Schwankungen der Profilsehne linear zu überlagern. Bei den nach Voraussetzung kleinen Amplituden darf man die Schwankung der Abszisse eines Flügelpunktes als klein von höherer Ordnung außer acht lassen, und hat dann, als allgemeinste noch mögliche Bewegung (vergl. Abb. 1)

Abb. 1
Elastische Aufhängung eines Joukowsky-Profils mit ebenem »Rückgrat«

$$y = p(t) + x\,\varphi(t) \qquad (12).$$

p und φ sind als **Fourierreihen** nach $\omega\,v$ zu entwickeln, von denen ich nur das erste Glied beibehalte:

$$y = (A + B\,x)\,e^{\omega' v t} \qquad (13),$$

Oberschwingungen wären wieder linear zu überlagern. Auch von Schwankungen in der Flugrichtung die durch periodische Schwankungen von v zu erfassen wären, soll abgesehen werden.

Die Größen A und B will ich als komplexe **Schlag-** bezw. **Drehamplitude** bezeichnen, denn (13) entsteht durch Kombination der speziellen Translations- und Rotationsschwingungen

$$A = 1,\ B = 0 \quad . \ . \ (\alpha) \qquad \text{und} \qquad A = 0,\ B = 1 \quad . \ . \ (\beta).$$

γ_0 und alle damit linear verbundenen Größen werden also linear und homogen in A un B sein. Zur Vereinfachung der Rechnung kann ich also die Fälle (α) und (β) je für sich rechnen und hinterher linear kombinieren, z. B.

$$a = A\,a_\alpha + B\,a_\beta \ \text{usw.}$$

Die komplexen Zirkulationskoeffizienten finde ich nun aus der Gl. (4) wie folgt: Ich setze a, b, c in Form der Reihen

$$\left.\begin{aligned} a = a_0 + a_1\,\omega' + a_2\,\omega' \log \omega' + a_3\,\omega'^2 + a_4\,\omega'^2 \log \omega' + a_5\,\omega'^2 \log^2 \omega' \\ + a_6\,\omega'^3 + a_7\,\omega'^3 \log \omega' + a_8\,\omega'^3 \log^2 \omega' + a_9\,\omega'^3 \log^3 \omega' + \ldots \\ b = b_0 + \ldots; \qquad c = c_0 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

an. Gl. (4) hat in unserem Falle die Form

$$w(x, t) = (A\,\omega' + B\,\omega'\,x + B)\,v\,e^{\omega' v t} = (a\,w_{0a} + b\,w_{0b} + c\,w_{0c})\,e^{\omega' v t}$$

Das soll nun identisch in x und t gelten. Fasse ich beide Seiten als Reihen nach $\omega'^m (\log \omega')^n$ auf, so müssen deren Koeffizienten identisch sein. Unbekannte sind dabei die a, b, c. Jeder Koeffizient liefert eine Beziehung in x, von der zunächst nicht zu erwarten ist, daß sie sich durch nur drei Freiwerte identisch erfüllen läßt. Es war beabsichtigt, die Bedingung wenigstens an drei geeignet gewählten Stellen x_1, x_2, x_3 zu erfüllen. Ueberraschenderweise zeigt sich nun, daß diese Bedingungen gerade vom zweiten und nicht von höherem Grade in x sind. Wenigstens ist das bis zu den Gliedern dritter Ordnung der Fall, und es ist nicht zu bezweifeln, daß es auch für die höheren Glieder so bleibt. Die Koeffizienten zweiten Grades in x bestimmen also mit ihren je drei Unterkoeffizienten je ein Wertetripel der a, b, c. In jedem neuen Vergleichskoeffizienten tritt dabei ein neues solches Wertetripel auf, so daß sich die dreißig angesetzten Unbekannten

aus linearen Beziehungen durch sukzessive Auswertung eindeutig finden lassen. Die Rechnung ergibt die folgenden Werte:

$$
\begin{array}{lll}
a_0 = 2\,B\,v, & b_0 = 0, & c_0 = 0, \\
a_1 = 2\,v\,[A + {}^1/_2\,B\,(1 - 2\,Z)], & b_1 = 4\,B\,v, & c_1 = 0, \\
a_2 = 2\,B\,v, & b_2 = 0, & c_2 = 0, \\
a_3 = 2\,v\,[-A\,Z - B\,(Z - Z^2)], & b_3 = 2\,v\,(A + {}^1/_2\,B), & c_3 = B\,v, \\
a_4 = 2\,v\,[A + B\,(1 - 2\,Z)], & b_i = c_i = 0, & i \geqq 4, \\
a_5 = 2\,B\,v, & & \\
a_6 = 2\,v\,[A\,Z^2 - B\,({}^1/_4 + {}^1/_2\,Z - {}^1/_2\,Z^2 + Z^3)], & {}^{1)} & \\
a_7 = 2\,v\,[-2\,A\,Z + B\,({}^1/_2 - Z + 3\,Z^2)], & & \\
a_8 = 2\,v\,[A + B\,({}^1/_2 - 3\,Z)], & & \\
a_9 = 2\,B\,v. & &
\end{array}
$$

Es sei hier noch kurz darauf hingewiesen, daß man Näherungswerte für die Zirkulationskoeffizienten auch erhält, wenn man die Wirkung der freien Wirbel außer acht läßt und elementar so rechnet, als ob der augenblickliche scheinbare Anstellwinkel jedes Flügelelements für seine Zirkulation maßgebend sei, nämlich der Winkel, den die Luftgeschwindigkeit v relativ zum bewegten Flügelelement mit dessen Richtung bildet. Da bei Drehschwingungen ($B \neq 0$) jedes Flügelelement eine andere Vertikalgeschwindigkeit hat, so sind die scheinbaren Anstellwinkel der Elemente alle verschieden, d. h. der als eben vorausgesetzte Flügel verhält sich so, als ob er eine scheinbare (dynamische) Krümmung hätte, die periodisch ist. Die einfache Rechnung (vergl. die Originalarbeit, Dritter Teil, Anfang des Abschnitts II) ergibt hiernach Zirkulationsbeiträge der beiden ersten Grundfunktionen, und zwar nur die folgenden Glieder:

$$
\mathfrak{a}_0 = 2\,B\,v, \qquad \mathfrak{b}_0 = 0,
$$
$$
\mathfrak{a}_1 = 2\,v\,(A + {}^1/_2\,B), \qquad \mathfrak{b}_1 = 2\,B\,v,
$$

also bis auf höhere Glieder und mit Rücksicht auf die Größenordnung von B (s. u.) eine gute Näherung.

Aus den Zirkulationskoeffizienten folgt nun leicht alles übrige. Die Größe ω' hatte ich eingeführt, um leichter rechnen und auch komplexe ω', d. h. gedämpfte bezw. angefachte Schwingungen, berücksichtigen zu können. Für gedämpfte Schwingungen verlieren die Integrale (10) zwar ihren Sinn, denn es war vorausgesetzt, daß die Schwingung schon unendlich lange läuft, so daß hier unendlich große Amplituden vorausgegangen sein müßten. Die erhaltenen Formeln können aber wohl als Näherungen beibehalten werden, vorbehaltlich einer Korrektur für den Anlaufvorgang. Für die nun folgende Betrachtung der stationären Schwingungen rechne ich der physikalischen Anschauung wegen mit der reellen Frequenz ω weiter.

Auftrieb und Moment sind rein periodische Größen, d. h. ihr zeitlicher Mittelwert ist 0. Trotzdem sind ihre Amplitude und ihr Phasenwinkel von Interesse. Nach Formel (6) ist:

$$
\left.
\begin{aligned}
K &= \varrho\,v^2\,\pi\,(A k_\alpha + B k_\beta)\,e^{i\,\omega\,v\,t} = \varrho\,v^2\,\pi\,(A k_\alpha + C k_\gamma)\,e^{i\,\omega\,v\,t} \\
&\qquad = \varrho\,v^2\,\pi\,\omega\,(A \bar{k}_\alpha + C \bar{k}_\gamma)\,e^{i\,\omega\,v\,t} \\
M &= \varrho\,v^2\,\pi\,(A m_\alpha + B m_\beta)\,e^{i\,\omega\,v\,t} = \varrho\,v^2\,\pi\,(A m_\alpha + C m_\gamma)\,e^{i\,\omega\,v\,t} \\
&\qquad = \varrho\,v^2\,\pi\,\omega\,(A \bar{m}_\alpha + C \bar{m}_\gamma)\,e^{i\,\omega\,v\,t}
\end{aligned}
\right\} \quad (15).
$$

Dabei ist:

$$
B = C\,\omega; \quad k_\gamma = \omega\,\bar{k}_\beta; \quad m_\gamma = \omega\,\bar{m}_\beta; \quad k_\alpha = \omega\,\bar{k}_\alpha; \quad m_\alpha = \omega\,\bar{m}_\alpha; \quad \bar{k}_\beta = \bar{k}_\gamma; \quad \bar{m}_\beta = \bar{m}_\gamma.
$$

Hier habe ich als neue Dreh-Amplitude die Größe C eingeführt. Das geschah deshalb, weil B bei gewöhnlichen Schlagbewegungen von der Größenordnung $\omega\,A$ ist, wie eine leichte Ueberlegung zeigt. Nun ist ω nach Voraussetzung klein, also werden A und C von gleicher Größenordnung sein, sodaß es für die Praxis bequemer ist, mit C zu rechnen, statt mit B. Die dritte Form der Luftkräfte gestattet, diese für Fälle gleicher Schlaggeschwindigkeit $A\,i\,\omega\,e^{i\,\omega\,v\,t}$ in einfacher Weise zu vergleichen, wobei die gröbste Näherungstheorie konstante Beiwerte $\bar{k}_\alpha = 2\,i$, $\bar{k}_\gamma = 2$ liefern würde. Die Beiwerte k und m sind komplexe Zahlen, deren Bestandteile durch die folgenden Reihenentwicklungen gegeben sind. Dabei ist bemerkenswert, daß die Reihen für m endlich sind.

[1]) Die Dimensionen aller Größen sind durch die Wahl der Flügeltiefe als Längeneinheit beeinflußt Ein Aufsatz des Verf. in der Zeitschr. f. Motorluftschiffahrt über denselben Gegenstand ist vom Standpunkt der Aehnlichkeitsmechanik einwandfrei angeordnet worden.

$$k_\sigma = k_\sigma' + i\, k_\sigma''; \quad m_\sigma = m_\sigma' + m_\sigma''; \quad \sigma = \alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

$$\left.\begin{aligned} \omega \bar{k}_\alpha' = k_\alpha' &= -(1-2Z)\,\omega^2 - 2\,\omega^2 \log\omega - 2\pi Z\,\omega^3 + 2\pi\,\omega^3\log\omega + \dots \\ \omega \bar{k}_\alpha'' = k_\alpha'' &= 2\,\omega - \pi\,\omega^2 + \left(\frac{\pi^2}{2} - 2Z^2\right)\omega^3 + 4Z\,\omega^3\log\omega - 2\,\omega^3\log^2\omega + \dots \end{aligned}\right\} \quad (16);$$

$$\left.\begin{aligned} k_\beta' = \bar{k}_\gamma' = \frac{1}{\omega}\,k_\gamma' &= 2 - \pi\,\omega + \left(\frac{\pi^2}{2} + 2Z - 2Z^2 - {}^1/_2\right)\omega^2 \\ &- 2(1-2Z)\,\omega^2\log\omega - 2\,\omega^2\log^2\omega - \left(\frac{\pi^3}{4} - \frac{\pi}{2} + \pi Z - 3\pi Z^2\right)\omega^3 \\ &+ \pi(1-6Z)\,\omega^3\log\omega + 3\pi\,\omega^3\log^2\omega + \dots \\ k_\beta'' = \bar{k}_\gamma'' = \frac{1}{\omega}\,k_\gamma'' &= (3-2Z)\,\omega + 2\,\omega\log\omega - \pi(1-2Z)\,\omega^2 \\ &- 2\pi\,\omega^2\log\omega + \left(\frac{\pi^2}{4} + {}^1/_2 + Z - {}^3/_2\,\pi^2 Z - Z^2 + 2Z^3\right)\omega^3 \\ &+ \left({}^3/_2\,\pi^2 - 1 + 2Z - 6Z^2\right)\omega^3\log\omega - (1-6Z)\,\omega^3\log^2\omega - 2\,\omega^3\log^3\omega + \dots \end{aligned}\right\} \quad (17);$$

$$m_\alpha' = \omega\,\bar{m}_\alpha' = -{}^1/_2\,\omega^2; \qquad m_\alpha'' = \omega\,\bar{m}_\alpha'' = 0 \quad \dots \quad (18);$$

$$m_\beta' = \bar{m}_\gamma' = \frac{1}{\omega}\,m_\gamma' = -{}^3/_8\,\omega^2; \qquad m_\beta'' = \bar{m}_\gamma'' = \frac{1}{\omega}\,m_\gamma'' = \omega \quad \dots \quad (19).$$

Es liegt nahe, k_σ und m_σ, wie in der Wechselstromtechnik üblich durch die Anfangslage rotierend gedachter »Zeitvektoren« in der komplexen Zahlenebene darzustellen, und aus ihnen mit den Parametern A und C, von denen ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit A reell gesetzt werden darf, die Amplitudenbeiwerte $k = A\,k_\alpha + C\,k_\gamma$ und entsprechend m nach Größe und Phase in bekannter Weise linear zusammenzusetzen. Das Diagramm (Abb. 2 und 3) zeigt die Kurven der Endpunkte der Vektoren k und m als Funktionen des Parameters ω. In der Darstellung der Kurven für k und m, die für die graphische Auswertung die genauesten Werte liefern würde, sind zum Vergleich der Konvergenz der Reihen die Kurven der verschiedenen Näherungen nebeneinander eingezeichnet. Von besonderem Interesse ist der Fall, bei dem der Flügel, ohne wesentliche Luftkräfte zu erfahren, über eine

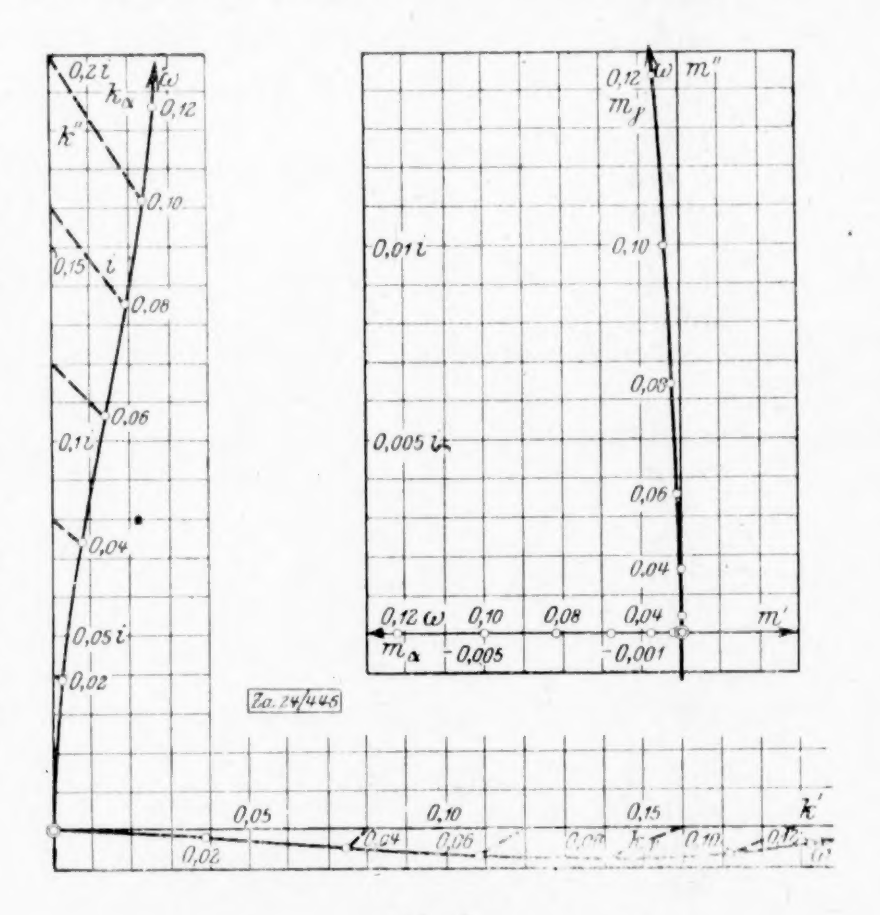
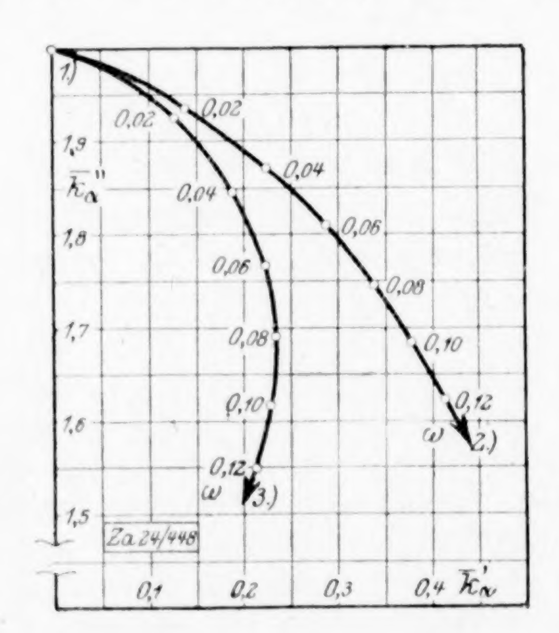


Abb. 2
Vektorielle Auftriebs- und Momentbeiwerte für gleiche Schlagamplituden.



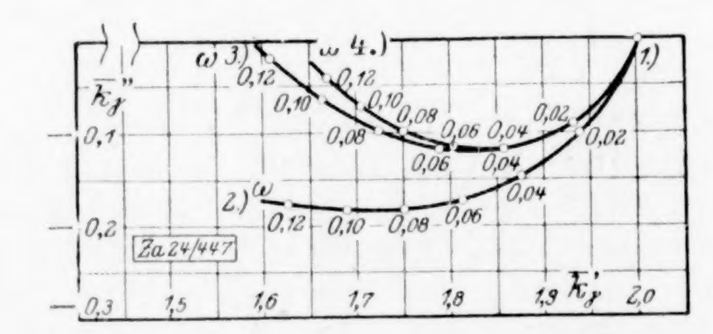


Abb. 3
Vektorielle Auftriebs- und Momentbeiwerte für gleiche Schlaggeschwindigkeit.

wellenförmige Stromlinienbahn gleitet, indem er sich dieser nach Möglichkeit anschmiegt. Dem entspricht der Parameter $C = -iA$, der in der Tat kleine Luftkräfte von zweiter Ordnung in ω ergibt, nämlich

$$\frac{1}{A} \cdot k' = 2\,\omega^2 + \ldots, \qquad \frac{1}{A} \cdot k'' = (1/2 - 2\,Z)\,\omega^3 + \ldots .$$

$$\frac{1}{A} \cdot m' = 1/2\,\omega^2, \qquad \frac{1}{A}\, m'' = 3/8\,\omega^3.$$

3. Der induzierte Widerstand. Der induzierte Widerstand ist nicht mehr linear in der Zirkulation, sodaß die komplexe Methode nicht ohne neue Festsetzungen beibehalten werden könnte. Sie bietet keine Vereinfachungen mehr und es empfiehlt sich, von hier ab mit dem imaginären Bestandteil aller Größen reell weiter zu rechnen. Führe ich die Rechnung nach (7) aus so nimmt W die Form an

$$W = W_0 + W_1 \sin(\omega\, v\, t + \varphi_1) + W_2 \sin(2\,\omega\, v\, t + \varphi_2).$$

Hier ist W_1 nur dann von 0 verschieden, wenn die Schwingung einem von 0 verschiedenen, konstanten Anstellwinkel überlagert wird. W ist in ω klein von zweiter Ordnung. Die rein periodischen Glieder sind also kaum von Bedeutung, wohl aber der von 0 verschiedene, zeitliche Mittelwert W_0. Ich berechne nur diesen und schreibe dafür der Einfachheit wegen wieder W. Ich setze $A = A' + i\,A''$, $B = B' + i\,B''$, $C = C' + i\,C''$ und kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $A'' = 0$ annehmen. Dann wird W eine quadratische Form in $A' = A$, B', B'' bezw. A, C', C'', und zwar zeigt eine einfache Ueberlegung, daß die Koeffizienten von B'^2 und B''^2 bezw. C'^2 und C''^2 gleich und der von $B' \cdot B''$ bezw. $C' \cdot C'' = 0$ ist. Also wird

$$\left.\begin{aligned} W &= \varrho\, v^2 \pi\, \{A^2 w_{\alpha\alpha} + 2\,A\,B'\, w_{\alpha\beta}' + 2\,A\,B''\, w_{\alpha\beta}'' + (B'^2 + B''^2)\, w_{\beta\beta}\} \\ &= \varrho\, v^2 \pi\, \{A^2 w_{\alpha\alpha} + 2\,A\,C'\, w_{\alpha\gamma}' + 2\,A\,C''\, w_{\alpha\gamma}'' + (C'^2 + C''^2)\, w_{\gamma\gamma}\} \end{aligned}\right\} \quad (20).$$

Die w_{ik} sind wieder Reihen nach $\omega^n \cdot (\omega \log \omega)^m$ und haben bis auf höhere Glieder die Werte

$$\left.\begin{aligned} w_{\alpha\alpha} &= -\,\omega^2 + \pi\,\omega^3 - (3/4\,\pi^2 - Z^2)\,\omega^4 - 2\,Z\,\omega^4 \log\omega + \omega^4 \log^2\omega + \ldots \\ w_{\alpha\beta}' &= \frac{1}{\omega}\, w_{\alpha\gamma}' = -\,1/4\,(3 - 2\,Z)\,\omega^2 - 1/2\,\omega^2 \log\omega \\ &\qquad + \frac{\pi}{4}(3 - 2\,Z)\,\omega^3 + \frac{\pi}{2}\,\omega^3 \log\omega + \ldots \\ w_{\alpha\beta}'' &= \frac{1}{\omega}\, w_{\alpha\gamma}'' = -\,1/2\,\omega + 3/4\,\pi\,\omega^2 - (5/8\,\pi^2 - 1/2\,Z^2 + 1/2\,Z)\,\omega^3 \\ &\qquad + 1/2\,(1 - 2\,Z)\,\omega^3 \log\omega = 1/2\,\omega^3 \log^2\omega + \ldots \\ w_{\beta\beta} &= \frac{1}{\omega^2}\, w_{\gamma\gamma} = \frac{\pi}{2}\,\omega - 1/2\,(\pi^2 + 1)\,\omega^2 + \frac{\pi}{8}(3\,\pi^2 + 2 - 4\,Z^2 - 4\,Z)\,\omega^3 \\ &\qquad + \frac{\pi}{2}(1 + 2\,Z)\,\omega^3 \log\omega - \frac{\pi}{2}\,\omega^3 \log^2\omega + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (21).$$

W kann je nach Wahl der Parameter positiv oder negativ sein. Je nach der Bewegungsart haben wir also mit Widerstand oder Vortrieb zu rechnen. Die Diskussion im einzelnen verschiebe ich bis nach Berechnung der Leistung und des Wirkungsgrades. Der schon genannte Fall des Gleitens über eine wellenförmige Strömung, entsprechend $C' = 0$, $C'' = -A$, gibt

$$W = A^2 \varrho\, v^2 \pi\, [-\,\omega^4 \log\omega - (1/2 - Z)\,\omega^4] > 0.$$

Die getroffene Wahl der Parameter entspricht also noch nicht ganz genau dem Falle $W = 0$, für den eine kleine Korrektur anzubringen wäre.

4. Arbeitsleistung am Flügel. In den freien Wirbeln hinter dem Flügel bleibt Energie zurück, die durch mechanische Arbeitsleistung am Flugzeug aufgebracht werden muß. Das kann auf zweierlei Art geschehen. Die Schlagbewegung kann wie erwähnt Vortrieb oder Rücktrieb ergeben. In diesem Falle ist zur Aufrechterhaltung des Bewegungsgleichgewichts ein Propeller nötig, der den Rücktrieb und alle sonstigen Fahrtwiderstände überwindet. Ein solcher ist in jenem Falle auch dann noch nötig, wenn die Fahrtwiderstände größer sind als der erzeugte Vortrieb. Erst wenn der Vortrieb die Fahrtwiderstände erreicht oder übertrifft, ist gleichförmiger, bezw. beschleunigter Flug allein mit Hilfe des Schlagflügelpropellers möglich. Was die Arbeitsleistung am Flügel selbst betrifft, so verzehrt die Flügelbewegung natürlich Energie, wenn Vortrieb vorhanden ist und ich kann

dann als aerodynamischen Wirkungsgrad des Schlagflügels das Verhältnis aus Vortriebsleistung $-L_w = -W \cdot v$ zur gesamten, am Flügel aufzuwendenden, mechanischen Leistung L_f bezeichnen. Im Falle des Rücktriebes sind noch zwei Möglichkeiten vorhanden. Einmal kann die Schlagbewegung noch Arbeit erfordern. Der oben definierte Wirkungsgrad wird dann negativ, und zwar beliebig groß, wenn die Flügelleistung L_f immer kleiner wird. Zweitens kann auch der Fall eintreten, daß L_f negativ wird, d. h. der Flügel erhält dann Energie aus der Luft (indirekt vom Propeller) zugeführt, und kann diese zur Ueberwindung der Widerstände im Schwingungsmechanismus verwenden oder sie in der Schwingung selbst aufspeichern, d. h. seine Amplituden vergrößern. Außer dieser »Inkrementleistung« hat der Propeller in diesem Falle natürlich auch noch die Energie der freien Wirbel zu liefern, sodaß man als Wirkungsgrad in bezug auf die Leistungsaufnahme des Flügels den Quotienten aus $-L_f$ und der gesamten Propellerleistung definieren kann. Das ist dann genau der reziproke Wert des oben definierten Wirkungsgrades, der in diesem Falle als Quotient zweier negativer Zahlen zwar positiv, aber größer als 1 wird, also seinen physikalischen Sinn verliert. L_f zerfällt in zwei Teile. Es ist

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \dot{p} + \dot{\varphi}\, x = i\,\omega\, v\,(A + B\,x)\, e^{i\omega v t}.$$

Damit wird $L_t = K \cdot \dot{p}$ die »Schlagleistung« und $L_r = M \cdot \dot{\varphi}$ die Leistung gegen die Drehschwingung, also ist die Flügelleistung $L_f = L_t + L_r$. Mit $L_w = W \cdot v$ bezeichne ich die Leistung gegen den Widerstand. In der Luft bleibt dann im ganzen $L = L_f + L_w = L_t + L_r + L_w$ zurück. Von sämtlichen L_i gebe ich wieder nur die zeitlichen Mittelwerte an, für die ich quadratische Formen desselben Typs erhalte, wie für W:

$$\left.\begin{aligned} L_i &= \varrho\, v^3 \pi\, \{A^2 l_{i\alpha\alpha} + 2\,A\,B'\, l_{i\alpha\beta'} + 2\,A\,B''\, l_{i\alpha\beta''} + (B'^2 + B''^2)\, l_{i\beta\beta}\} \\ &= \varrho\, v^3 \pi\, \{A^2 l_{i\alpha\alpha} + 2\,A\,C'\, l_{i\alpha\gamma'} + 2\,A\,C''\, l_{i\alpha\gamma''} + (C'^2 + C''^2)\, l_{i\gamma\gamma}\} \end{aligned}\right\} \quad (22).$$

L_r hat endliche Reihen und ist i. a. klein gegen L_t. Im einzelnen sind die Beiwerte:

$$l_{wik} = w_{ik} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23);$$

$$\left.\begin{aligned} l_{t\alpha\alpha} &= \omega^2 - \frac{\pi}{2}\omega^3 + \left(\frac{\pi^2}{4} - Z^2\right)\omega^4 + 2\,Z\,\omega^4 \log\omega - \omega^4 \log^2\omega + \ldots \\ l_{t\alpha\beta'} &= \frac{1}{\omega}\, l_{t\alpha\gamma'} = {}^1/_4\,(3 - 2\,Z)\,\omega^2 + {}^1/_2\,\omega^2 \log\omega \\ &\qquad - \frac{\pi}{4}(1 - 2\,Z)\,\omega^3 - \frac{\pi}{2}\,\omega^3 \log\omega + \ldots \\ l_{t\alpha\beta''} &= \frac{1}{\omega}\, l_{t\alpha\gamma''} = {}^1/_2\,\omega - \frac{\pi}{4}\,\omega^2 + \left(\frac{\pi^2}{8} + {}^1/_2\,Z - {}^1/_2\,Z^2 - {}^1/_8\right)\omega^3 \\ &\qquad - {}^1/_2\,(1 - 2\,Z)\,\omega^3 \log\omega - {}^1/_2\,\omega^3 \log^2\omega + \ldots \\ l_{t\beta\beta} &= \frac{1}{\omega^2}\, l_{t\gamma\gamma} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (24);$$

$$l_{r\alpha\alpha} = 0; \quad l_{r\alpha\beta'} = \frac{1}{\omega}\, l_{r\alpha\gamma'} = 0; \quad l_{r\alpha\beta''} = \frac{1}{\omega}\, l_{r\alpha\gamma''} = {}^1/_8\,\omega^3; \quad l_{r\beta\beta} = \frac{1}{\omega^2}\, l_{r\gamma\gamma} = {}^1/_2\,\omega^2 \quad (25);$$

$$\left.\begin{aligned} l_{f\alpha\alpha} &= \omega^2 - \frac{\pi}{2}\omega^3 + \left(\frac{\pi^2}{4} - Z^2\right)\omega^4 + 2\,Z\,\omega^4 \log\omega - \omega^4 \log^2\omega + \ldots \\ l_{f\alpha\beta'} &= \frac{1}{\omega}\, l_{f\alpha\gamma'} = {}^1/_4\,(3 - 2\,Z)\,\omega^2 + {}^1/_2\,\omega^2 \log\omega \\ &\qquad - \frac{\pi}{4}(1 - 2\,Z)\,\omega^3 - \frac{\pi}{2}\,\omega^3 \log\omega + \ldots \\ l_{f\alpha\beta''} &= \frac{1}{\omega}\, l_{f\alpha\gamma''} = {}^1/_2\,\omega - \frac{\pi}{4}\,\omega^2 + \left(\frac{\pi^2}{8} + {}^1/_2\,Z - {}^1/_2\,Z^2\right)\omega^2 \\ &\qquad - {}^1/_2\,(1 - 2\,Z)\,\omega^3 \log\omega - {}^1/_2\,\omega^3 \log^2\omega + \ldots \\ l_{f\beta\beta} &= \frac{1}{\omega^2}\, l_{f\gamma\gamma} = {}^1/_2\,\omega^2 \end{aligned}\right\} \quad (26);$$

$$\left.\begin{aligned} l_{\alpha\alpha} &= \frac{\pi}{2}\,\omega^3 - \frac{\pi^2}{2}\,\omega^4 + \ldots; \\ l_{\alpha\beta'} &= \frac{1}{\omega}\, l_{\alpha\gamma'} = \frac{\pi}{2}\,\omega^3 + \ldots; \qquad l_{\alpha\beta''} = \frac{1}{\omega}\, l_{\alpha\gamma''} = \frac{\pi}{2}\,\omega^2 - \frac{\pi^2}{2}\,\omega^3 + \ldots \\ l_{\beta\beta} &= \frac{1}{\omega^2}\, l_{\gamma\gamma} = \frac{\pi}{2}\,\omega - \frac{\pi^2}{2}\,\omega^2 + \left({}^3/_8\,\pi^3 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\,Z^2 - \frac{\pi}{2}\,Z\right)\omega^3 \\ &\qquad + \frac{\pi}{2}(1 + 2\,Z)\,\omega^3 \log\omega - \frac{\pi}{2}\,\omega^3 \log^2\omega + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (27).$$

L kann als Energie des Wirbelschwanzes natürlich nie negativ werden, muß also eine in den Amplituden positiv-definite quadratische Form sein. Daß in der angeschriebenen Form L auch kleiner negativer Werte fähig ist, liegt an der Vernachlässigung höherer Glieder der Reihenentwicklung. Was man in diesem Falle erhält, ist also nur der zufällig negative Fehler der nahezu verschwindenden Wirbelleistung. Da bei Verwendung von C alle Beiwerte den Faktor ω^2 enthalten, so ist dieser bei der graphischen Auftragung gekürzt worden, was wieder der Leistungsdarstellung bei konstanter Schlaggeschwindigkeit entspricht (Abb. 4). Die Kurven zeigen, daß die wesentlichen Glieder stets von der Schlagamplitude A herrühren, event. in Verbindung dieser mit der Drehamplitude, und daß die entsprechenden Beiwerte etwas langsamer anwachsen als ω^2. Unter Drehschwingung wurde oben zunächst eine solche um die z-Achse verstanden. Allgemeiner ist jede Schwingung, bei der A und C reelles Verhältnis haben, eine Drehschwingung um die feste Achse mit der Abszisse a, wo dann $A = -a\,C\,\omega$ ist. Es zeigt sich, daß für nicht zu große Werte von $a\omega$, d. h. für Achsen, die in nicht zu großer Ferne liegen, W und L stets positiv sind, d. h., es ist nicht möglich, durch Drehschwingungen um feste Achsen Vortrieb oder Leistungsaufnahme zu erhalten. Zur Vortrieberzeugung ist stets eine von 0 verschiedene Schlagamplitude, zur Leistungsaufnahme außer dieser eine um rd. 90° nacheilende Drehschwingung erforderlich. Reine Schlagschwingung ohne Drehung erzeugt auch bereits Vortrieb, der sich in gröbster Näherung ähnlich wie beim sogenannten Knoller-Betz-Effekt (wenn man mit der y-Achse als »Polare« im ebenen Problem rechnet) zu

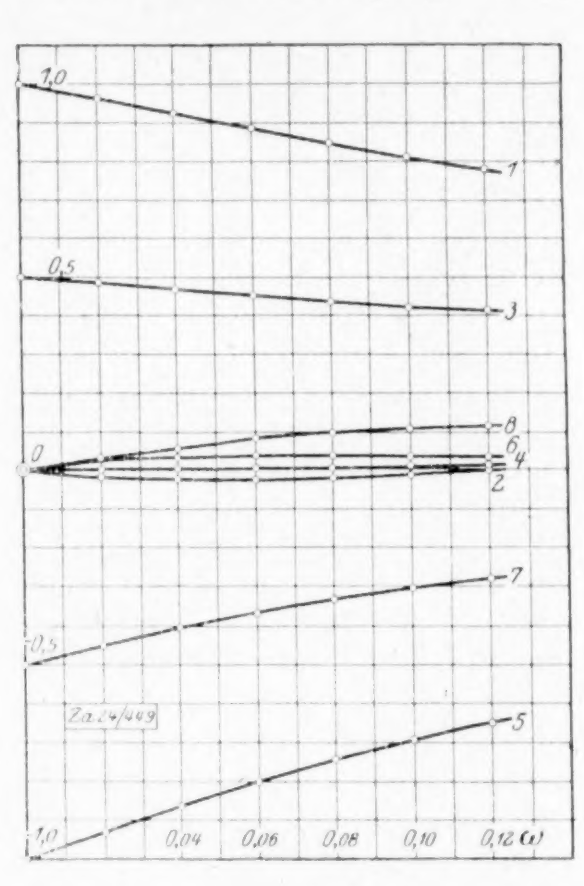


Abb. 4
Leistungs- und Widerstandsbeiwerte für gleiche Schlaggeschwindigkeit.
1) $\omega^{-2}\,l_{f\alpha\alpha}$; 2) $\omega^{-2}\,l_{f\alpha\gamma'}$; 3) $\omega^{-2}\,l_{f\alpha\gamma''}$; 4) $\omega^{-2}\,l_{f\gamma\gamma}$; 5) $\omega^{-2}\,w_{\alpha\alpha}$; 6) $\omega^{-2}\,w_{\alpha\gamma'}$; 7) $\omega^{-2}\,w_{\alpha\gamma''}$; 8) $\omega^{-2}\,w_{\gamma\gamma}$;

$$-W = A^2 \varrho v^2 \pi \omega^2 \quad \text{ergibt.}$$

Einen guten Einblick in den Verlauf von Widerstand und Leistung gewinnt man, wenn man bei festem Absolutwert des Amplitudenverhältnisses $C : A = c$ nur den Phasenwinkel φ zwischen beiden Schwingungskomponenten verändert, wo dann $C' = A\,c' = A\,|c|\cos\varphi$, $C'' = A\,c'' = A\,|c|\sin\varphi$ zu setzen ist. Es zeigt sich, daß W ein Minimum, d. h. der Vortrieb ein Maximum wird, wenn die Drehung um etwas mehr als 90° voreilt, nämlich um $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{w_{\alpha\gamma''}}{w_{\alpha\gamma'}}$. Auch physikalisch ist plausibel, daß der Vortrieb gerade dann große Werte annehmen wird, wenn die Phase um rd. 180° gegenüber der bei luftkraftfreiem Gleiten über die Wellenbahn vorhandenen Phase verschoben ist. Für jedes $|c|$ gibt es ein ω und umgekehrt, bei dem das Vortriebsmaximum ein absolutes ist. Es ist dann

$$c'(\omega) = -\frac{w_{\alpha\gamma'}}{w_{\gamma\gamma}}, \qquad c''(\omega) = -\frac{w_{\alpha\gamma''}}{w_{\gamma\gamma}}, \qquad W_{\min} = A^2 \varrho v^2 \pi\, w_{\min}$$

$$w_{\min} = w_{\alpha\alpha} - \frac{w_{\alpha\gamma'}^2 + w_{\alpha\gamma''}^2}{w_{\gamma\gamma}} = -\frac{1}{2\pi}\,\omega - \frac{1}{2\pi^2}\,\omega^2 - \frac{1}{2\pi^3}\left(1 + {}^3/_4\,\pi^2\right)\omega^3 - \ldots\ldots$$

L wird ein Minimum und verschwindet bei geeignetem ω bis auf Glieder fünfter Ordnung bei einem Nacheilen der Drehung um etwas mehr als 90°. Die Flügelleistung L_f schließlich wird ein Minimum, d. h. die absorbierte Leistung ein Maximum, wenn die Drehung um etwas weniger als 90° nacheilt, nämlich bei $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{l_{f\alpha\gamma''}}{l_{f\alpha\gamma'}}$. Auch dieses Maximum wird absolut, wenn zwischen c und ω die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$c'(\omega) = -\frac{l_{f\alpha\gamma'}}{l_{f\gamma\gamma}}, \qquad c''(\omega) = -\frac{l_{f\alpha\gamma''}}{l_{f\gamma\gamma}}, \qquad L_{f\min} = A^2 \varrho v^3 \pi\, l_{f\min}$$

$$l_{f\min} = l_{f\alpha\alpha} - \frac{l_{f\alpha\gamma'}^2 + l_{f\alpha\gamma''}^2}{l_{f\gamma\gamma}} = -1 + \frac{\pi}{2}\,\omega + \ldots\ldots$$

Übrigens wird L überhaupt nur dann negativ, wenn $|c| > 1$ ist.

Der Wirkungsgrad

$$\eta_1 = \frac{1}{\eta_2} = -\frac{L_w}{L_f} = 1 - \frac{L}{L_f}, \quad \text{wo} \quad \left.\begin{matrix} \eta_1 \text{ für } L_f > 0 \text{ und} \\ \eta_2 \text{ » } L_f < 0 \text{ gilt} \end{matrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28),$$

ist der Quotient zweier quadratischer Formen und mannigfacher Werte fähig. Er wird im allgemeinen für kleine oder ganz verschwindende Schlagamplituden negativ und mit $\omega \to 0$ beliebig groß. Dasselbe gilt bei Drehungen um eine feste, nicht zu ferne Achse. Ist aber $A \neq 0$ und auch $\lim\limits_{\omega = 0} A \neq 0$, so geht η zur Grenze 1 bei $\omega \to 0$.

Durch eine gleich- oder gegenphasige Drehkomponente ($c'' = 0$) wird η gegenüber $c = 0$ stets verschlechtert und dasselbe gilt bei $c' = 0$, $c'' > 0$. Dagegen wird bei $c' = 0$, $-1 \leq c'' \leq 0$ der Wirkungsgrad verbessert, wie aus dem Diagramm (Abb. 5) ersichtlich ist. Für $c' = 0$, $c'' = -1$ wird η identisch 1 und für $c' = 0$, $c'' < -1$ ergibt sich Leistungsaufnahme. Auch für den Wirkungsgrad ist die Darstellung bei festem $|c|$ in Abhängigkeit von φ als gebrochene einwellig-harmonische Funktion sehr anschaulich. Man erkennt aus Abb. 6 deutlich, bei welchen Phasenwinkeln der Uebergang von Leistungsabgabe in Leistungsaufnahme stattfindet. Die wichtigsten der aus den Reihenentwicklungen gefundenen Beiwerte sind in der Zahlentafel niedergelegt.

5. Anwendung auf das Flattern elastisch befestigter Flügel. Eine praktische Anwendung der abgeleiteten Gesetze ergab sich in der Untersuchung einer Erscheinung, die unsere Flieger im letzten Kriege beobachtet haben. Bei den sogenannten $1^1/_2$-Deckern war der untere Flügel nur an einem einzigen Holme befestigt, also gegenüber kleinen Ausbiegungen und Drehungen nur schwach gefedert. Bei erhöhter Fluggeschwindigkeit, z. B. bei steilen Sturzflügen, trat dann mitunter ein lebhaftes Flattern der unteren Flügelspitzen ein, die im verstärkten Luftstrome offenbar instabile Schwingungen machten.

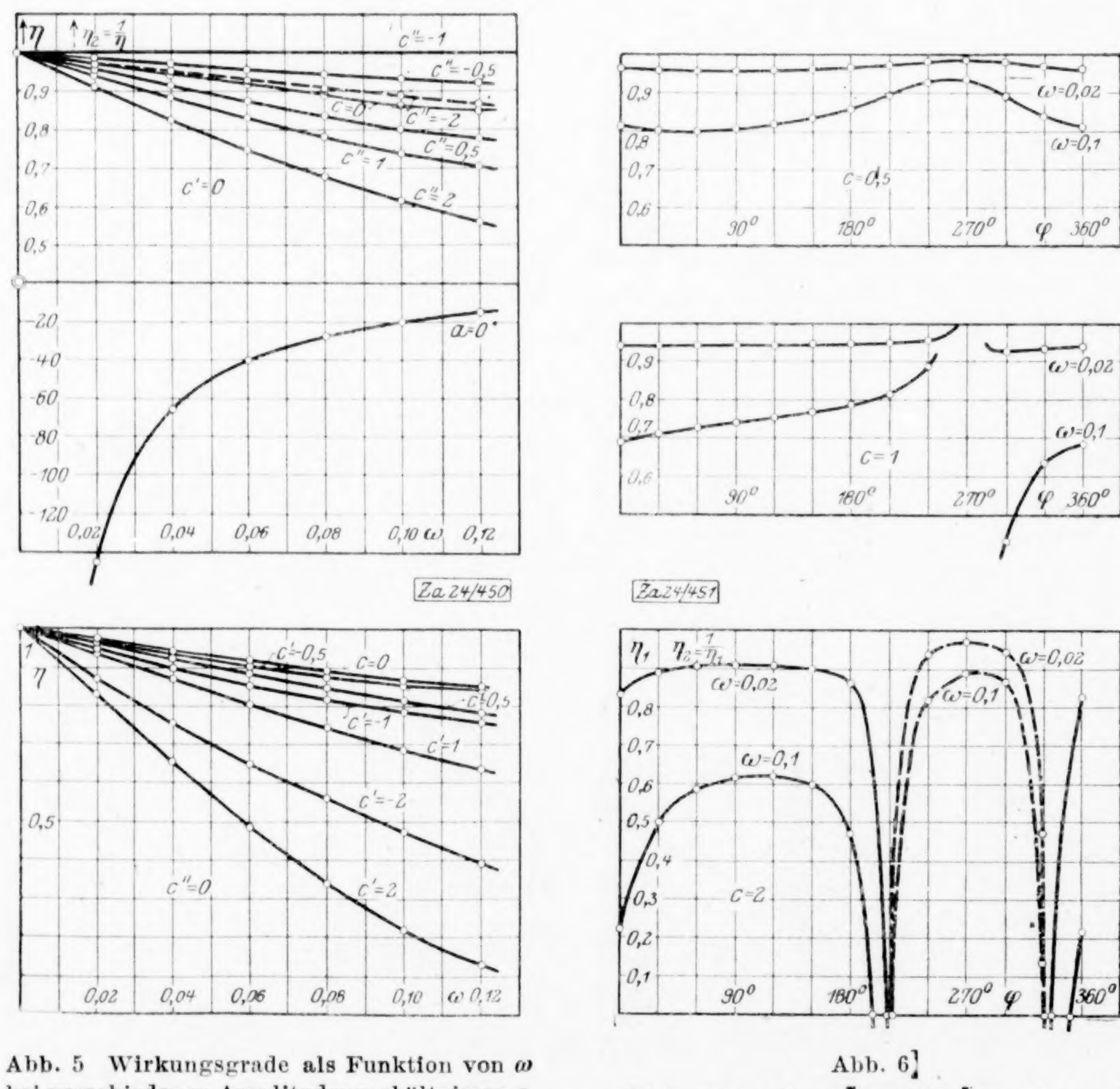


Abb. 5 Wirkungsgrade als Funktion von ω bei verschiedenen Amplitudenverhältnissen c.

Abb. 6 Wirkungsgrade als Funktion der Phase φ.

Solche sind natürlich nur bei Energiezufuhr zu dem schwingenden System möglich, und diese tritt nach meinen Untersuchungen ein, wenn der Drehamplitudenvektor um etwa 90^0 nacheilt und wenn die Drehamplitude selbst groß genug ist (es muß nämlich $|C| > |A|$ sein). Man denke wieder an das fast luftkraftfreie Gleiten des Flügels über eine Wellenbahn, bei dem die Relativgeschwindigkeit der Luft zu den Flügelelementen keine Vertikalkomponente hat. Ist die Drehamplitude kleiner, als diesem Falle entspricht, so wird die Bewegung durch die ihr entgegenwirkende Luftkraft gedämpft. Ist die Drehamplitude dagegen größer als im genannten Falle, schaufelt der Flügel also tiefer in die Luft ein, so wirkt die Luftkraft immer im Sinne der Bewegung und diese wird angefacht.

Ich betrachte also einen Flügel, der auf Holmen gelagert ist, und zwar federnd gegen Translation in der y-Richtung und gegen Verdrehung. Um an meine bisherigen Formeln anschließen zu können, führe ich die Direktionskräfte pro Längeneinheit in der z-Richtung ein, rechne also so, als ob diese stetig über die Länge des Flügels verteilt wären, eine Annahme, die zu keinen Widersprüchen führt, wenn der Flügel an sich, abgesehen von seiner Lagerung, hinreichend steif ist. Da ich von Ausbiegungen in der Flugrichtung absehe, so läßt sich zeigen, daß ein auf Holmen gelagerter Flügel immer nur drei wesentliche Elastizitätsparameter hat, entsprechend den drei Konstanten der in p und φ quadratischen Formänderungsarbeit (vergl. Abb. 1 bezw. die Originalarbeit). Er läßt sich also in bezug auf seine elastischen Eigenschaften stets ersetzen durch einen Flügel, der nur auf einem Holm (der »elastischen Achse«) mit der Abszisse a gelagert ist, gefedert gegen Translation mit der Direktionskraft c und gegen Drehung mit dem Direktionsmoment γ, wie dies schematisch in Abb. 1 angedeutet ist. Die Resultierende der elastischen Kräfte und ihr Moment im Ursprung sind dann:

$$K = -c(p + a\varphi), \quad M = -cap - (ca^2 + \gamma)\varphi.$$

Ist s die Abszisse der Schwerpunktsachse (Punkt S, Abb. 1), so haben mit der Masse m pro Längeneinheit und dem entsprechenden Trägheitsmoment $\vartheta = mr^2$ für die Schwerpunktsachse, der Impuls und sein Moment im Ursprung die Werte:

$$G = m(p + s\varphi), \qquad U = msp + (ms^2 + \vartheta)\varphi = msp + m(s^2 + r^2)\varphi.$$

Die Bewegungsgleichungen des Flügels lauten dann:

$$\dot{G} = K. \qquad \dot{U} = M.$$

Bei K und M sind noch die Luftkräfte hinzuzufügen. Setze ich wie früher

$$p = Ae^{\omega' v t}, \qquad \varphi = Be^{\omega' v t},$$

und beachte ich, daß die Luftkräfte auf den Flügel entgegengesetzt wirken, wie die oben berechneten Kräfte des Flügels auf die Luft, so wird

$$K = -e^{\omega' v t}\{cA + caB + \varrho v^2 \pi (Ak_\alpha + Bk_\beta)\},$$
$$M = -e^{\omega' v t}\{caA + (ca^2 + \gamma)B + \varrho v^2 \pi (A_{m\alpha} + B_{m\beta})\}.$$

Zur Abkürzung führe ich noch die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\frac{\varrho \pi}{m} = \varrho_0 \qquad \frac{c}{m v^2} = \omega_0^2 \qquad \frac{\gamma}{c} = q^2.$$

Damit ergeben sich endlich als Schwingungsgleichungen:

$$A(\omega'^2 + \omega_0^2 + \varrho_0 k_\alpha) + B(s\omega'^2 + a\omega_0^2 + \varrho_0 k_\beta) = 0.$$
$$A(s\omega'^2 + a\omega_0^2 + \varrho_0 m_\alpha) + B((r^2 + s^2)\omega'^2 + (a^2 + q^2)\omega_0^2 + \varrho_0 m_\beta) = 0 \,. \quad (29).$$

Nullsetzen der Determinante liefert die Gleichung für die Frequenzen $\omega = -i\omega'$. Sehe ich zunächst einmal von den Luftkräften ab (dazu ist $\varrho_0 = 0$ zu setzen), so ergeben sich zwei Hauptschwingungen als Folge der Koppelung der Schwingung des Schwerpunktes mit der Frequenz ω_0 und der Schwingung um den Schwerpunkt mit der Frequenz $\frac{q}{r}\omega_0$. Mit $\delta = (s - a)^2 + r^2 + q^2$ ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= -\omega_{1,2}'^2 = \frac{\omega_0^2}{2r^2}\left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4q^2r^2}\right) \\ \frac{A}{B} &= -\frac{s\left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4q^2r^2}\right) - 2ar^2}{\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4q^2r^2} - 2r^2} = -a_{1,2} \\ y_k &= B_k(x - a_k)e^{i\omega_k v t}; \quad k = 1,2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (30).$$

Die Hauptschwingungen sind also Drehschwingungen um feste Achsen in den Abständen a_1, a_2. Die Größe $s - a$ bildet ein Maß für die Koppelung. Im allgemeinen bilden sich Schwebungen aus beiden Hauptschwingungen aus. Schreibe ich diese in der Form

$$y = \{ -a_1 B_1 e^{i \varepsilon v t} - a_2 B_2 e^{-i \varepsilon v t} + x [B_1 e^{i \varepsilon v t} + B_2 e^{-i \varepsilon v t}]\} e^{i \omega v t}; \quad \begin{array}{l} \omega_1 + \omega_2 = 2\omega \\ \omega_1 - \omega_2 = 2\varepsilon << \omega, \end{array}$$

so kann man die Bewegung als eine gewöhnliche Schwingung mit nach Größe und Phase langsam veränderlichem Amplitudenverhältnis auffassen. Dabei tritt natürlich auch periodisch wiederkehrend der Phasenwinkel auf, der im Luftstrome der Leistungsaufnahme entspricht. Sollen nun die Luftkräfte der Änderung dieses Phasenwinkels entgegenwirken, entsprechend dauernder Energiezufuhr, so läßt sich zeigen, daß der Fall geringer Koppelung ($s - a$ klein) bei abgestimmten oder nahezu abgestimmten Frequenzen des ungekoppelten Systems für diese Erscheinung die beste Voraussetzung ist. Ohne Koppelung ($s = a$) würde überhaupt keine instabile Schwingung möglich sein, das sei aus den Resultaten der nun folgenden Rechnung mit Berücksichtigung der Luftkräfte vorweggenommen.

Die in der Schwingungsdeterminante vorkommenden Luftkraftbeiwerte sind selbst Funktionen der Frequenz ω', die sich nicht durch einfache analytische Ausdrücke angeben lassen, so daß die Wurzeln der Schwingungsdeterminante nicht in einfacher Weise erhalten werden können. Da ihre Existenz indessen durch den physikalischen Sinn des Problems gesichert ist, so ist es erlaubt, an Stelle der Beiwerte k und m die ersten Glieder ihrer Reihenentwicklungen in die Gleichung einzuführen, zumal der auftretende Faktor ϱ_0 i. a. eine kleine Zahl ist; denn es hat Sinn, die Reihe für $\cos x$ abzubrechen, um aus dem erhaltenen Polynom z. B. die erste Nullstelle dieser Funktion angenähert zu finden, während dasselbe Verfahren bei e^x keinen Sinn hat, da eben von dieser Funktion keine Nullstellen im Endlichen existieren.

Die Schwingungsdeterminante erhält die folgende Form:

$$r^2 \omega'^4 + \delta \omega_0^2 \omega'^2 + q^2 \omega_0^4 + \varrho_0 \omega'^2 [(r^2 + s^2) k_\alpha - s k_\beta - s m_\alpha + m_\beta]$$
$$+ \varrho_0 \omega_0^2 [(a^2 + q^2) k_\alpha - a k_\beta - a m_\alpha + m_\beta] + \varrho_0^2 (k_\alpha m_\beta - k_\beta m_\alpha) = 0 \quad (31).$$

Die gröbste Näherung ergibt die Rechnung, welche nach Art der Theorie des Knoller-Betz-Effektes den augenblicklichen scheinbaren Anstellwinkel und die scheinbare (dynamische) Krümmung des Flügels der Bestimmung der Auftrieb- und Momentbeiwerte zugrunde legt. Schon damit ergeben sich in gewissen Fällen komplexe Wurzeln ω' mit positivem Realteil, die ein »Inkrement« der Schwingungen ergeben, also dynamischer Instabilität entsprechen. Auf diese Näherung will ich hier nicht weiter eingehen. Auch von dem Fall der gröbsten Instabilität will ich, weil er trivial ist, nur kurz Erwähnung tun. Er tritt ein, wenn die elastische Achse so weit hinten liegt, daß bei der geringsten Entfernung des Flügels aus der Gleichgewichtslage der Luftstrom den Apparat einfach aperiodisch nach hinten umkippt. Das tritt stets ein, sobald a positiv und die Luftgeschwindigkeit groß genug ist, nämlich bei $a > \frac{q^2 \omega_0^2}{2 \varrho_0}$ oder $v^2 > \frac{\gamma}{2 \varrho \pi a}$ bei $a > 0$.

Behalte ich nun von k und m alle Glieder bis zur zweiten Ordnung in ω' bei, so wird die Periodengleichung des Flügels:

$$f(\omega') = a_0 \omega'^4 + a_0' \omega'^4 \log \omega' + a_0'' \omega'^4 \log^2 \omega' + b_0 \omega'^3 + b_0' \omega'^3 \log \omega'$$
$$+ c_0 \omega'^2 + c_0' \omega'^2 \log \omega' + c_0'' \omega'^2 \log^2 \omega' + d_0 \omega' + d_0' \omega' \log \omega' + e_0 = 0 \quad (32)$$

mit den Koeffizenten:

$$a_0 = r^2 + \varrho_0 \varepsilon + \varrho_0^2 ({}^1/_8 + {}^1/_4 Z - Z^2) > 0.$$
$$b_0 = \varrho_0 \mu + \varrho_0^2 ({}^1/_4 - Z) > 0, \qquad c_0 = \omega_0^2 (\delta + \varrho_0 \nu) - 2 \varrho_0 s + \varrho_0^2,$$
$$d_0 = \omega_0^2 \varrho_0 \lambda > 0, \qquad e_0 = \omega_0^2 (q^2 \omega_0^2 - 2 \varrho_0 a).$$
$$a_0' = \varrho_0 [2 (r^2 + s^2) - 2 s (1 - 2 Z) - \varrho_0 ({}^1/_4 - 2 Z)], \quad a_0'' = - \varrho_0 (2 s + \varrho_0), \quad b_0' = - \varrho_0 (2 s - \varrho_0);$$
$$c_0' = 2 \varrho_0 \omega_0^2 [a^2 + q^2 - a (1 - 2 Z)]. \qquad c_0'' = d_0' = - 2 \varrho_0 a \omega_0^2.$$
$$\delta = (s - a)^2 + r^2 + q^2 > 0, \qquad \mu = 1 + 2 (r^2 + s^2) - s (3 - 2 Z) > 0.$$
$$\lambda = 1 + 2 (a^2 + q^2) - a (3 - 2 Z) > 0.$$
$$\varepsilon = (r^2 + s^2)(1 - 2 Z) - s (1 - 2 Z + 2 Z^2) + {}^3/_8 > 0.$$
$$\nu = (q^2 + a^2)(1 - 2 Z) - a (1 - 2 Z + 2 Z^2) + {}^3/_8 > 0.$$
$$Z = 0{,}11593 \ldots\ldots$$

6. Numerische Auswertuug. Die Gleichung läßt sich natürlich nur näherungsweise auflösen. Zu dem Zwecke ließ ich die logarithmischen Glieder zunächst weg und bestimmte die Wurzeln $\overline{\omega}'$ der algebraischen Gleichung

$$g(\overline{\omega}') = a_0 \overline{\omega}'^4 + b_0 \overline{\omega}'^3 + c_0 \overline{\omega}'^2 + d_0 \overline{\omega}' + e_0 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (33).$$

Diese betrachte ich als Näherung, setze $\omega' = \overline{\omega}' + \varkappa$ und kann nun die logarithmischen Glieder unter Beibehaltung der linearen Glieder in $\varkappa$ entwickeln. So erhalte ich

$$\varkappa = - \overline{\omega}' \log \overline{\omega}' \, \frac{R}{S} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34).$$

$$R = a_0' \overline{\omega}'^3 + a_0'' \overline{\omega}'^3 \log \overline{\omega}' + b_0' \overline{\omega}'^2 + c_0' \overline{\omega}' + d_0' (1 + \overline{\omega}' \log \overline{\omega}').$$

$$\begin{aligned} S = {} & 4 a_0 \overline{\omega}'^3 + a_0' \overline{\omega}'^3 (1 + 4 \log \overline{\omega}') + 2 a_0'' \overline{\omega}'^3 \log \overline{\omega}' (1 + 2 \log \overline{\omega}') \\ & + 3 b_0 \overline{\omega}'^2 + b_0' \overline{\omega}'^2 (1 + 3 \log \overline{\omega}) + 2 c_0 \overline{\omega}' + c_0' \overline{\omega}' (1 + 2 \log \overline{\omega}') \\ & + d_0 + d_0' (1 + 2 \overline{\omega}' \log \overline{\omega}') (1 + \log \overline{\omega}'). \end{aligned}$$

Das Verfahren läßt sich fortsetzen und liefert die weitere Näherung

$$\varkappa' = - \frac{R(\omega') \, \omega' \log \omega' + g(\omega')}{S(\omega')}.$$

Schließlich folgt das komplexe Amplitudenverhältnis $B : A = b$ aus einer der Gleichungen (29).

Es handelt sich nun noch darum, die Bedingungen kennen zu lernen, wann die Gleichung für ω' komplexe Wurzeln mit positivem Realteil hat, entsprechend angefachten Schwingungen oder kritischer Lagerung des Flügels. Für den Grenzfall dynamischer Indifferenz setze ich die Wurzeln der Gleichung (32) rein imaginär an und erhalte durch Nullsetzen des reellen und des imaginären Bestandteils der Gleichung die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} & \left(a_0 - \frac{\pi^2}{4} a_0''\right) \omega^4 + a_0' \omega^4 \log \omega + a_0'' \omega^4 \log^2 \omega + b_0' \frac{\pi}{2} \omega^3 \\ & \qquad - \left(c_0 - \frac{\pi^2}{4} c_0''\right) \omega^2 - c_0' \omega^2 \log \omega - d_0' \omega \left(\frac{\pi}{2} + \omega \log^2 \omega\right) + e_0 = 0 \\ & a_0' \frac{\pi}{2} \omega^3 + a_0'' \pi \omega^3 \log \omega - b_0 \omega^2 - b_0' \omega^2 \log \omega - c_0' \frac{\pi}{2} \omega \\ & \qquad + d_0' \log \omega (1 - \pi \omega) + d_0 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (35).$$

Aus ihnen wäre in jedem speziellen Falle ω zu eliminieren, wodurch sich eine Bedingungsgleichung für irgend einen der Parameter s, a, r^2, q^2, α_0, ϱ_0 oder für die Fluggeschwindigkeit v ergibt. Näherungsweise genügt es aber auch schon, die Gleichung (33) zu untersuchen. Da die Näherung (34) im Falle der Instabilität eine kleine zusätzliche Dämpfung ergibt, so sind die aus den folgenden Gleichungen abgeleiteten Kriterien für Instabilität zwar notwendig, aber nicht immer hinreichend, sie gelten also nur vorbehaltlich der Nachprüfung mit der Näherung (34). Der Flügel darf aber immerhin als kritisch gelagert gelten, wenn sie erfüllt sind. Ehe ich das allgemeinste Kriterium für Instabilität hinschreibe, will ich ein solches anführen, das sehr einfach ist, dafür aber nur für Fälle grober Instabilität ausreicht. Es ist dies die Bedingung, daß der Koeffizient c_0 negativ wird:

$$v^2 > \frac{c(\delta + \varrho_0 \nu)}{\varrho \pi (2 s - \varrho_0)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36).$$

Als Funktion von s geschrieben, lautet dieselbe Bedingung:

$$s^2 \omega_0^2 - 2 s (\varrho_0 + a \omega_0^2) + \varrho_0^2 + \omega_0^2 (a^2 + r^2 + q^2 + \varrho_0 \nu) < 0.$$

Weitere Grenzen liefert die Routhsche Bedingung

$$\left.\begin{aligned} & c_0 < a_0 \frac{d_0}{b_0} + e_0 \frac{b_0}{d_0} \quad \text{oder} \\ & \omega_0^2 (\delta + \varrho_0 \nu) + \varrho_0^2 - 2 \varrho_0 s < [r^2 + \varrho_0 \varepsilon + \varrho_0^2 (1/8 + 1/4 Z - Z^2)] \frac{\lambda \omega_0^2}{\mu + \varrho_0 (1/4 - Z)} \\ & \qquad + (q^2 \omega_0^2 - 2 \varrho_0 a) \frac{\mu + \varrho_0 (1/4 - Z)}{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (37).$$

Um diese Gleichung zu erfüllen, wird man vor allen Dingen verlangen, daß v groß genug, d. h. ω_0 klein genug ist. Ferner muß s positiv sein und damit ist auch $s - a$ positiv, denn $a > 0$ ergäbe, wie vorher angeführt, bei hinreichend großem v stets

grobe Instabilität. Man kann sich leicht überlegen, daß dies so sein muß. Die Schwerlinie des Flügels als Trägheitsmittellinie eilt im allgemeinen der elastischen Achse als Angriffslinie der Direktionskraft nach. Liegt die Schwerlinie also in der Flugrichtung hinter der elastischen Achse ($s - a > 0$), so hat der Flügel bei seiner Aufwärtsbewegung im Mittel positiven Anstellwinkel und umgekehrt bei seiner Abwärtsbewegung. Die Luftkräfte wirken also jeweils im Sinne der Bewegung und verstärken die Schwingung, während im Falle $s - a < 0$ das Umgekehrte, also Dämpfung, eintritt.

Daß zum Zustandekommen der Schwingung beide Freiheitsgrade zusammenwirken müssen, ist leicht zu bestätigen. Die Rechnung ergibt stets Wurzeln mit negativem Realteil, wenn einer der Freiheitsgrade gebunden wird (entsprechend $\omega_0 = \infty$ oder $q^2 = \infty$). Das wird bestätigt durch das Fehlschlagen von Versuchen, die früher mit einem Flügel mit nur einem Freiheitsgrad in Göttingen angestellt wurden.

Die vom Flügel abgegebene bezw. aufgenommene Leistung L ist nach früheren Formeln

$$L_f = A^2 \varrho \pi v^3 l_f, \qquad l_f = l_{f\alpha\alpha} + 2 b' l_{f\alpha\beta'} + \ldots \ldots \quad (38\,a).$$

Setze ich vorübergehend $\omega' = \beta + i\omega$, so ist der Mittelwert der gesamten Flügelenergie bei konstanter Amplitude A

$$\overline{E} = {}^1/_4\, m v^2 A^2 Q; \quad Q = \omega_0^2 + \omega^2 + 2 b' (a \omega_0^2 + s \omega^2) + (b'^2 + b''^2) \left[(a^2 + q^2) \omega_0^2 + (r^2 + s^2) \omega^2 \right].$$

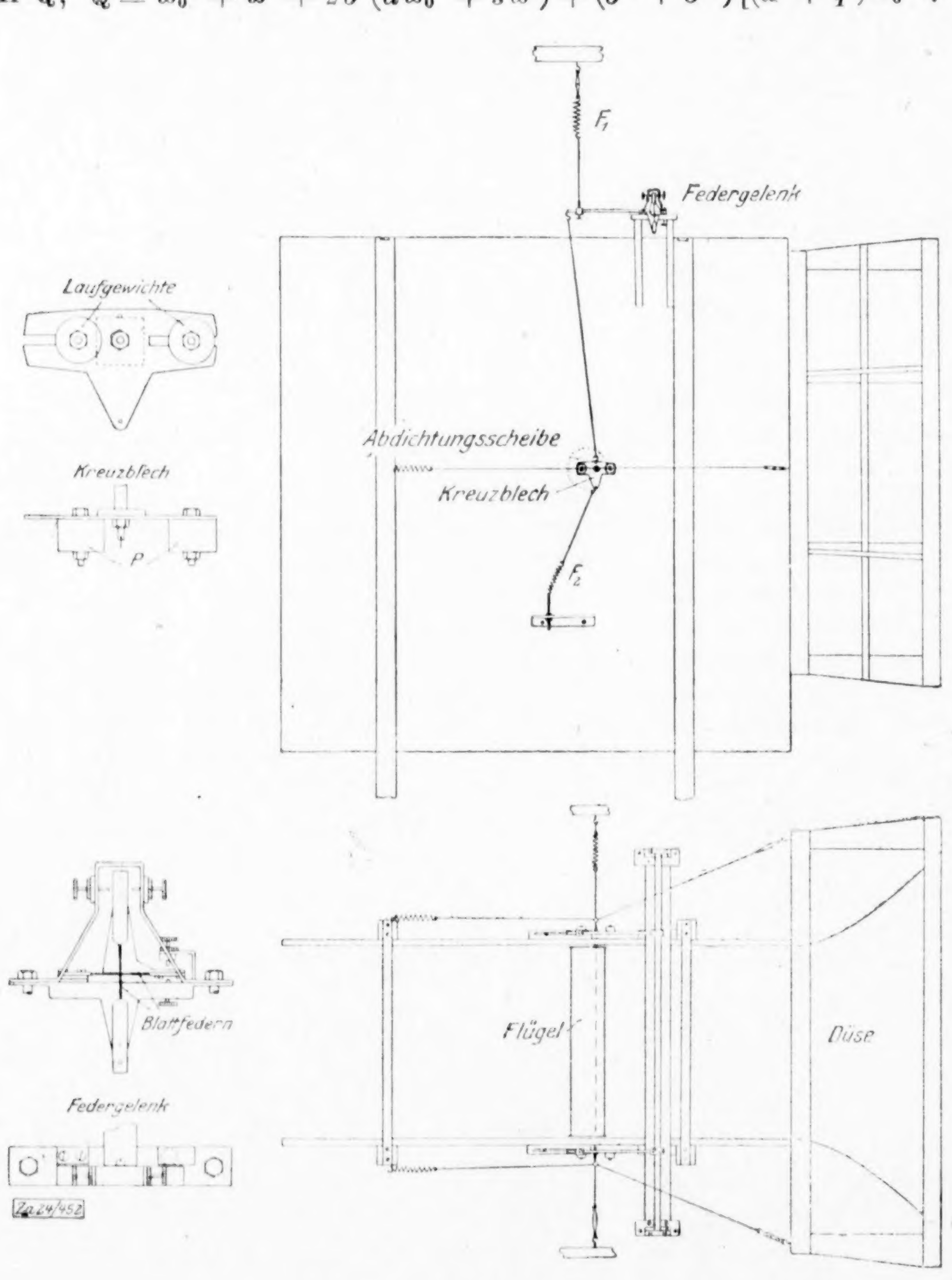


Abb 7

Versuchsanordnung.

Nun ist $A = A_0 e^{\nu \beta t}$ und daraus in anderer Form

$$- L_f = \frac{d\bar{E}}{dt} = {}^1/_2\, m v^2 A \dot{A} Q = \frac{\beta}{2}\, m v^3 A^2 Q; \qquad l_f = - \frac{\beta}{2\varrho_0}\, Q \quad . \quad . \quad (38\,\mathrm{b}).$$

Hat man die Schwingungsrechnung durchgeführt, so liefert hiernach die Uebereinstimmung der auf verschiedenen Wegen gefundenen Werte l_f eine Kontrolle für die Rechnung.

7. Vergleich mit einem Versuchsergebnis. Zur Bestätigung der Theorie wurden im kleinen Windkanal der Göttinger aerodynamischen Versuchsanstalt Versuche mit einem leichten Holzflügel von 60 cm Länge und 10 cm Tiefe angestellt.

Dieser wurde zwischen ebenen Seitenwänden an einer Achse mittels Federn aufgehängt. Die Federn griffen an kreuzförmigen Blechen an, die außerdem verschiebbare Laufgewichte zur Variation des Schwerpunktsabstandes und des Trägheitsmoments trugen. Durch die Aufhängefedern bezw. ihre Vorspannung wurde auf die Aufhängeachse die meinem Ansatz entsprechende Direktionskraft bezw. das Direktionsmoment übertragen. Auf weitere Einzelheiten der Apparatur will ich hier nicht eingehen und verweise dazu lieber auf die Zeichnung Abb. 7. Zweck der Versuche war, die Inkremente bezw. Dekremente der Schwingungen zu bestimmen, und dazu genügte es, die Schwingung eines

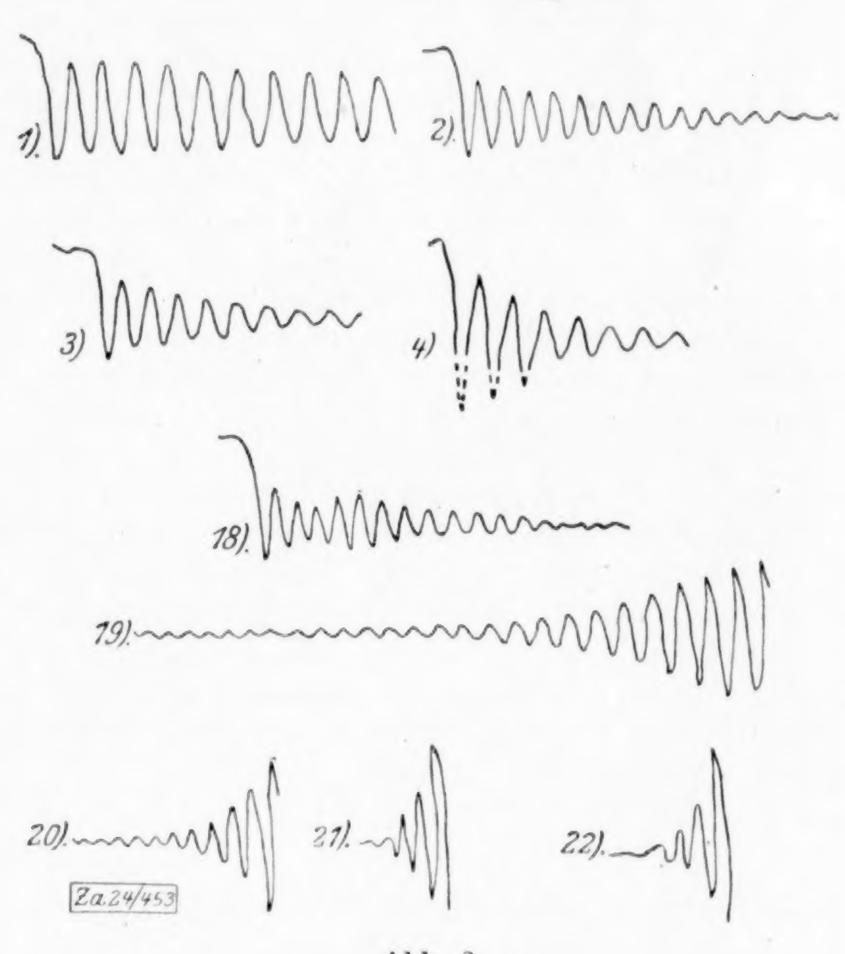


Abb. 8

Schwingungsdiagramme.

Zahlentafel errechneter Beiwerte für Luftkräfte und Leistungen.

$\omega =$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12
$k_\alpha' =$	0,00262	0,00773	0,01351	0,01892	0,02317	0,02572
$k_\alpha'' =$	0,03852	0,07387	0,10605	0,13532	0,16182	0,18601
$k_\gamma' =$	0,03860	0,07449	0,10806	0,13982	0,17029	0,19989
$k_\gamma'' =$	− 0,00184	− 0,00468	− 0,00694	− 0,00788	− 0,00710	− 0,00452
$m^{\alpha\prime} =$	− 0,0002	− 0,0008	− 0,0018	− 0,0032	− 0,0050	− 0,0072
$m_\alpha'' = 0$						
$m_\gamma' =$	− 0,000003	− 0,000024	− 0,000081	− 0,000192	− 0,000375	− 0,000648
$m_\gamma'' =$	0,0004	0,0016	0,0036	0,0064	0,0100	0,0144
$\omega^{-2} w_{\alpha\alpha} =$	− 0,9336	− 0,8684	− 0,8073	− 0,7514	− 0,7014	− 0,6576
$\omega^{-2} w_{\alpha\gamma}' =$	0,02369	0,03209	0,03480	0,03419	0,03150	0,02752
$\omega^{-2} w_{\alpha\gamma}'' =$	− 0,4529	− 0,4094	− 0,3707	− 0,3371	− 0,3089	− 0,2862
$\omega^{-2} w_{\gamma\gamma} =$	0,02924	0,05414	0,07468	0,09088	0,10273	0,11024
$\omega^{-2} l_{\alpha\alpha} =$	0,02944	0,05494	0,07648	0,09408	0,10773	0,11744
$\omega^{-2} l_{\alpha\gamma}' =$	0,00063	0,00251	0,00566	0,01005	0,01571	0,02262
$\omega^{-2} l_{\alpha\gamma}'' =$ $\omega^{-2} l_{\gamma\gamma} =$ }	0,02944	0,05494	0,07648	0,09408	0,10773	0,11744
$\omega^{-2} l_{f\alpha\alpha} =$	0,9631	0,9233	0,8837	0,8455	0,8091	0,7750
$\omega^{-2} l_{f\alpha\gamma}' =$	− 0,02306	− 0,02958	− 0,02914	− 0,02414	− 0,01579	− 0,00490
$\omega^{-2} l_{f\alpha\gamma}'' =$	0,48235	0,4643	0,4471	0,4312	0,4166	0,4036
$\omega^{-2} l_{f\gamma\gamma} =$	0,0002	0,0008	0,0018	0,0032	0,0050	0,0072

Punktes, z. B. der Aufhängeachse aufzuzeichnen. Das geschah mit Hilfe einer Registriertrommel, die das physiologische Institut der Universität Göttingen freundlichst zur Verfügung gestellt hatte. Einige der aufgenommenen Diagramme gedämpfter und anwachsender Schwingungen sind in Abb. 8 wiedergegeben. Aus ihnen wurden die Verhältnisse $\sigma = e^{\pi \frac{\beta}{\omega}}$ aufeinander folgender Amplituden bestimmt und unter Berücksichtigung der Reibungsdämpfung, die ein σ_{0t} und σ_{0r} der Translations- bezw. Rotationsschwingung lieferte, mit den rechnerisch gefundenen Werten verglichen. Die Uebereinstimmung darf innerhalb der erheblichen Fehlergrenzen, die sich nur durch größeren Aufwand an Zeit und Mitteln hätten verengern lassen, als gut bezeichnet werden.

Der Gang der Zahlen war in bester Uebereinstimmung mit der Theorie. Es ergab sich Anwachsen oder Dämpfung der kleinen Schwingungen, je nachdem der Flügel nach hinten oder vorn Uebergewicht hatte, und dabei vergrößerte sich das Verhältnis aufeinanderfolgender Amplituden, wenn das Uebergewicht vergrößert oder der Flügel stärker angeblasen wurde. Der Augenschein zeigte deutlich ein Voreilen der Vorderkante des Flügels, wenn dieser instabil gelagert war. Das entspricht in der eingeführten Bezeichnungsweise einem Nacheilen der Drehschwingung, wie es bei Leistungsaufnahme sein muß.

Bemerkenswert ist noch, daß sich bei kleinen Luftgeschwindigkeiten von etwa 5 m pro Sekunde, der Einfluß der Zähigkeit in der Weise zeigte, daß bei kleinen Anstellwinkeln der Auftrieb noch nicht voll ausgebildet war. Bei den kleineren Kennwerten von etwa 500 m/sek · mm hat nämlich, wie auch andere Versuche in Göttingen ergaben, ein symmetrischer Flügel einen kleinen Bereich »toter Anstellwinkel«, wo der Auftrieb in der Nähe von null bleibt. Die kleinen Schwingungen wurden daher noch abgedämpft, wenn solche mit größerer Anfangsamplitude schon anwachsen. Die zwischen diesen beiden Fällen liegende Grenzamplitude wurde mit wachsendem v natürlich immer kleiner. 292

Über die Wasserströmung in einem mit Stichkanälen versehenen Umlaufkanal bei Kammerschleusen.[1]

Von **B. SCHUMACHER** in Duisburg-Meiderich.

Bei einer Untersuchung über die Grundlagen der Wasserbewegung beim Betriebe von Kammerschleusen trat die Aufgabe auf, die Strömungsverhältnisse an den Trennungsstellen von Umlauf und Stichkanälen zu ermitteln. Es handelt sich um die Strömung in einem Kanal mit rechteckiger Abzweigung. Die zweidimensionale Potentialströmung in einem solchen Bereich läßt sich nach der Methode von Christoffel-Schwarz berechnen (Abb. 1). Hier aber soll gezeigt werden, daß man auf ganz elementarem Wege eine sehr brauchbare Näherungslösung erhalten kann.

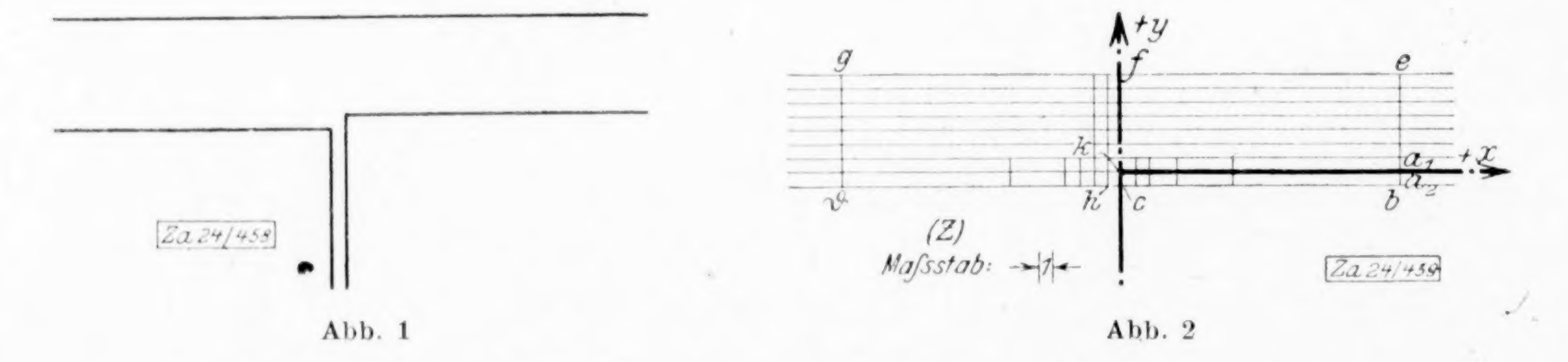


Abb. 1 Abb. 2

1. Zahlenmäßige Herstellung der Abbildung. Die Strom- und Gefällinien eines geraden Kanals mit parallelen Wandungen sind bekannt, da die ihnen zukommenden Parallelen und Senkrechten der Kontinuitätsbedingung genügen (Abb. 2). Dieser Parallelstreifen soll auf eine Fläche winkeltreu abgebildet werden, die aus einem durchlaufenden

[1]) Aus einer von der Technischen Hochschule in Aachen genehmigten Dr.-Ing.-Dissertation vom 7. März 1923: Ueber die Grundlagen der Wasserbewegung beim Betriebe von Kammerschleusen (Ref. Prof. Blumenthal).

Band mit einer rechtwinklig verlaufenden Abzweigung besteht und deren an die Abzweigung anschließende Begrenzungen möglichst gerade verlaufen. Eine solche Abbildung läßt sich durch Zusammensetzen von Abbildungen mittels Potenzfunktionen erhalten.

Der als Beispiel in Abb. 2 durch Begrenzung, Strom- und Gefällinien näher bezeichnete Parallelstreifen der z-Ebene enthält acht Stromfäden, von denen der zwischen den Geraden $z = + x$ und $z = + x - i$ liegende bei 0 von den durchgehenden Fäden abgezweigt werden soll.

Die Abbildung $$w_1 = z^{0,8} \quad \text{(I)}$$

ergibt die Abb. 3, nachdem durch den Schnitt von 0 bis $+\infty$ der Zusammenhang der Fläche gelöst ist. Der abgezweigte Stromfaden weist eine Richtungsänderung von 72° gegen die Ursprungsrichtung auf.

Die Abbildung $$w_2 = -1,3195 - w_1 \quad \text{(II)}$$

schreibt einen mit einer Drehung um 180° verbundenen Ursprungswechsel nach Abb. 4 vor. Der Ursprung wird nach h verlegt. Für diese Wahl der w_2-Ebene sind die beiden Bedingungen bestimmend, daß Unstetigkeiten im Innern des Gebiets vermieden werden und die Begrenzungen ka_1 und hd möglichst geradlinig weiter abgebildet werden sollen. Deshalb ist der Ursprung entsprechend (II) in den Schnittpunkt beider Grenzen zu legen.

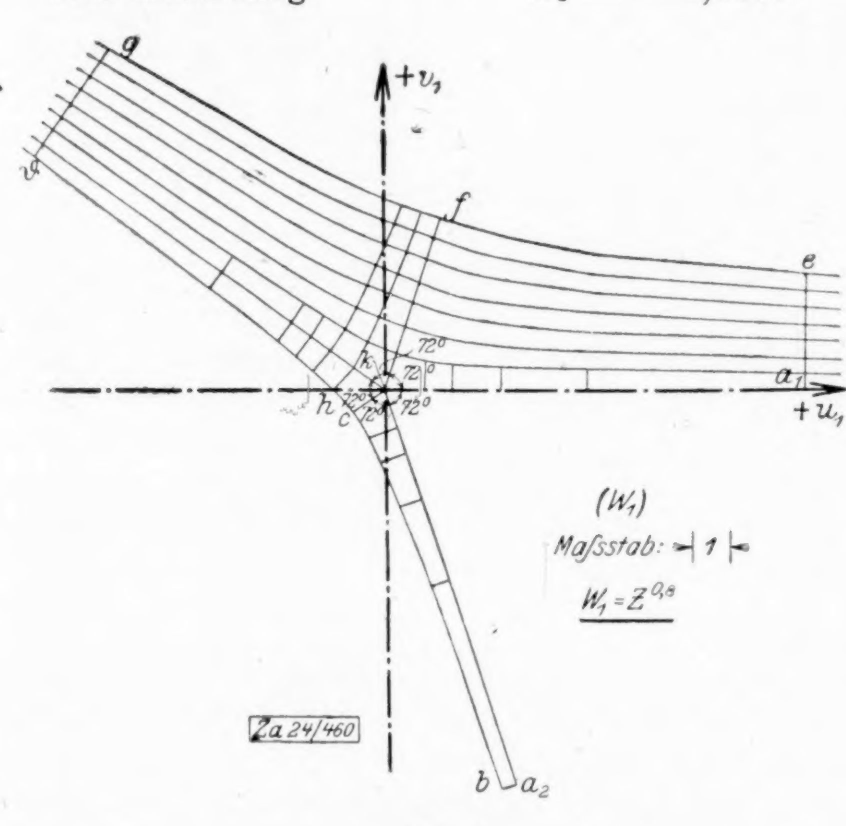


Abb. 3

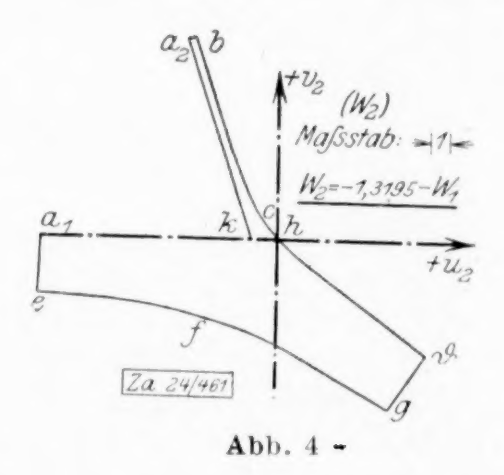


Abb. 4

Durch $$w_3 = w_2^{1,25} \quad \text{(III)}$$

entsteht die Abb. 5, deren Einzelwerte logarithmisch berechnet worden sind.

Die gewonnene Abbildung soll in Hinsicht auf ihre Uebereinstimmung mit den gestellten Forderungen geprüft werden. Die Bildpunkte von $\varphi = 2\pi$, $r = 8$ und $r = 20$ einerseits, von $\varphi = 0$, $r = 8$ und $r = 20$ anderseits werden je durch eine Gerade verbunden. Diese Geraden bilden dann miteinander den Winkel 88° 10′ 36″; an einem rechten fehlen 1° 49′ 24″. Die Verbindungsgeraden des Punktes h mit den beiden Punkten $|x| = 20$ bilden den Winkel 182° 25′ 15″; die vorgelegten Bedingungen verlangen 180°. Für die zeichnerische Genauigkeit entspricht in w_3 bei dem Bild der Punkte $z = \pm 20 - i$ eine Gerade der ursprünglichen Geraden. Da auch $z = + x$ ($\varphi = \text{const} = 0$) gerade bleibt, sind die vorgeschriebenen Bedingungen annähernd erfüllt und es ist nicht nötig, den Verlauf der einzelnen Stromfäden zu verfolgen.

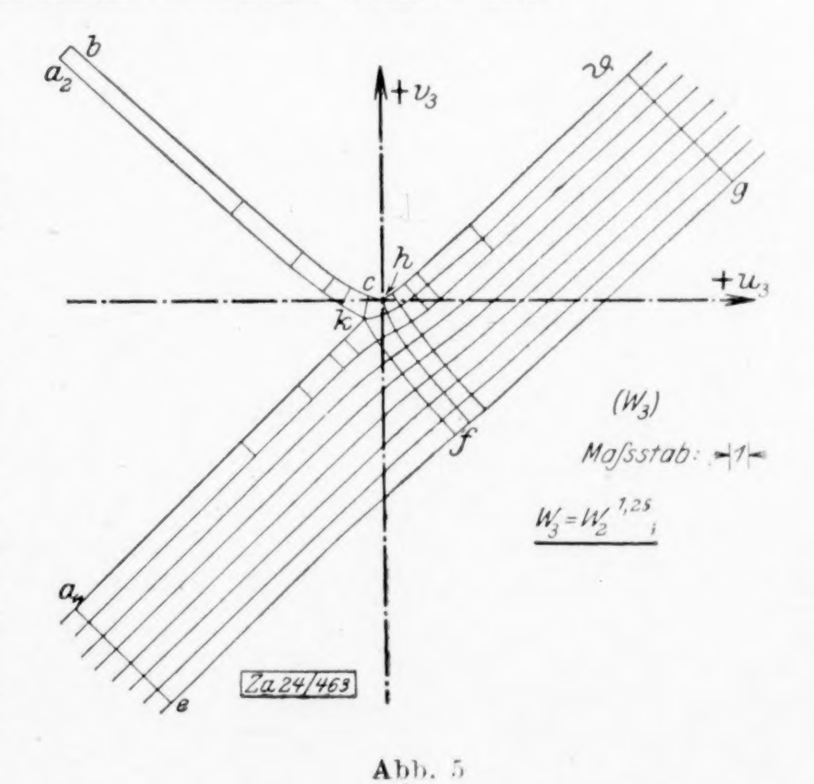


Abb. 5

Die Breite des abgezweigten Strahles in der w_3-Ebene vom Querschnitt $z_0 = -i$ bis $z_5 = +20 - i$ nimmt von $d_0 = 1{,}2412$ bis $d_5 = 1{,}0204$ ab; die Verengung tritt fast ausschließlich an der Verzweigungsstelle ein. In einer Entfernung von dort gleich der Breite des durchlaufenden Streifens sind die Begrenzungen fast parallel.

Die Breiten der dargestellten Stromfäden des durchlaufenden Bandes in den Querschnitten $z = \pm 20$ betragen 1,03 und 0,98. Die Breite des Bandes vermindert sich vom Querschnitt $z = -20$ bis $z = -8$ von 7,8274 auf 7,7334 und vom Querschnitt $z = +8$ bis $z = +20$ von 7,1913 bis 7,1530.

Die Einschnürung des abzweigenden ersten Stromfadens im Querschnitt zwischen $z = -1$ und $z = -1 - i$ auf 0,73 steht einer Breite des Fadens auf der vorangehenden Strecke von 0,98 gegenüber und errechnet sich zu 0,25.

2. Formelmäßige Behandlung der entfernten Punkte. Nach dieser numerischen Besprechung soll noch eine formelmäßige gegeben werden, die sich auf die sehr weit entlegenen Punkte der z- und der w-Ebene bezieht. Die Beziehung zwischen w_3 und z schreibt sich zusammenfassend so:

$$w_3^{0,8} = -1{,}3195 - z^{0,8} \quad \text{oder} \quad w = w_3 = (-1{,}3195 - z^{4/5})^{5/4} \quad . \quad . \quad (1).$$

Dabei ist die Ebene der z in folgender Weise aufgeschnitten (Abb. 6):

Infolgedessen ist für alle genügend weit entfernten Punkte des abzubildenden Streifens mit Ausnahme derer des abgetrennten Strahles

$$w = z\left(1 + \frac{1{,}25 \cdot 1{,}3195}{z^{0,8}} + \ldots\right) = z + 1{,}25 \cdot 1{,}3195 \cdot z^{0,2} + \varepsilon(z) \quad . \quad . \quad (2),$$

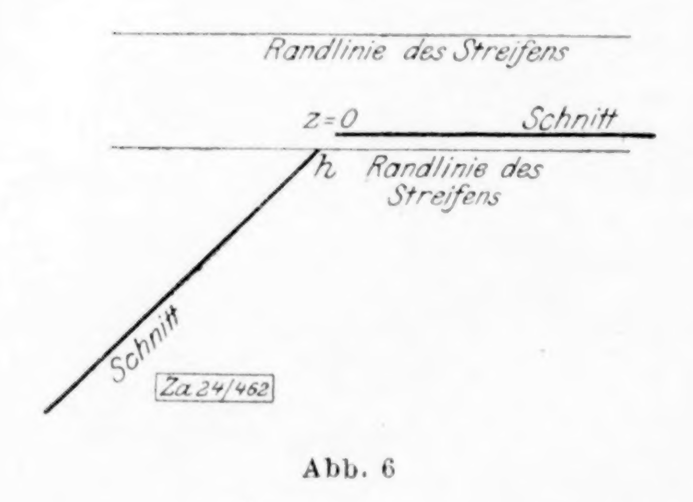


Abb. 6

wo $\varepsilon(z)$ eine mit wachsendem z dem Betrage nach beliebig abnehmende Funktion bezeichnet. Die Werte in dem abgetrennten Streifen erhält man am einfachsten so: Formel (2) liefert die Werte am oberen Ufer des von h ausgehenden Querschnitts. Die Werte am unteren Ufer unterscheiden sich von diesen um den Faktor $e^{-\frac{5\pi i}{2}}$. Daher gilt am unteren Ufer und auch in dem abgetrennten Strahle:

$$w = e^{-\frac{5\pi i}{2}}\left(z + 1{,}25 \cdot 1{,}3195\, z^{0,2} + \varepsilon(z)\right) \quad (3).$$

Aus diesen Formeln ziehen wir folgende Schlüsse:

a) Wir vergleichen die Werte von w für $z = r$ und $z = r \cdot e^{2i\pi}$. Aus (2) und (3) ergibt sich sofort

$$\lim_{r=\infty} \frac{w(r \cdot e^{2i\pi})}{w(r)} = e^{-\frac{i\pi}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

d. h. die weit entfernten Punkte der Abzweigung sind gegen den durchgehenden Strom um einen rechten Winkel gedreht. Hierin liegt der tiefere Grund der von uns gebrauchten Potenz $z^{4/5}$. Wären wir nämlich von dem allgemeinen Ansatz ausgegangen

$$w = (-b - z^{1/\alpha})^{\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1'),$$

so hätten wir nach dem gleichen Verfahren erhalten

$$\lim_{r=\infty} \frac{w(r \cdot e^{2i\pi})}{w(r)} = e^{-2i\pi(\alpha - 1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4'),$$

also eine Drehung der Abzweigung um $2(\alpha - 1)\pi$. Die Forderung der Drehung um einen Rechten führt auf $\alpha = 5/4$.

b) Im Unendlichen bleiben bei der Abbildung alle Maße erhalten. Denn die Bilder zweier Punkte z und $z + e$ unterscheiden sich nach (2) um

$$\begin{aligned} w(z+e) - w(z) &= [(z+e) + 1{,}25 \cdot 1{,}3195\,(z+e)^{0,2} + \varepsilon(z+e)] \\ &\quad - [z + 1{,}25 \cdot 1{,}3195 \cdot z^{0,2} + \varepsilon(z)], \\ &= e + 1{,}25 \cdot 1{,}3195 \cdot 0{,}2\, e \cdot z^{-0,8} + \eta(z), \\ &= e + \eta_1(z), \end{aligned}$$

wie sich durch binomische Entwicklung von $(z+e)^{0,2}$ ergibt. η und η_1 bedeuten wieder dem Betrage nach mit wachsendem z beliebig abnehmende Größen.

Die gleiche Betrachtung gilt für den abgetrennten Strahl.

Damit sind die aus der Abbildung abgelesenen Verhältnisse auch formelmäßig allgemein bestätigt.

Zu a) ist noch folgendes zu bemerken:

Bei praktischen Ausführungen handelt es sich nicht um Herstellung eines Abzweigungswinkels zwischen sehr weit vom Ursprung entfernten Punkten, sondern um etwa den Winkel, den die zahlenmäßig bei der Besprechung von (III) bezeichneten Punkte einschließen. Für diesen Zweck läßt sich die Abbildung noch verbessern durch die weitere Bilderreihe

$$w_4 = w_3^{-\frac{\pi i}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (IV)$$

$$w_5 = w_4^{1,0136} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (V).$$

Die Zeichnung und Einzelrechnung über w_3 hinaus fortzusetzen ist aber nicht notwendig, da durch die weiteren Abbildungen die Fläche nur sehr wenig verändert wird.

Der Abzweigungswinkel nach (I) (II) (III) bei $z = 0$ ist 72^0. Einen rechten Winkel stellt die Bilderfolge

$$W_1 = z^{0,75} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (VI),$$

$$W_2 = -1,114 - W_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (VII),$$

$$W_3 = W_2^{1,3333} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (VIII)$$

her. Da die erste Reihe (I) (II) (III) mit der Bedingung, daß das Produkt der Exponenten 1 ergeben muß, durch Zwischenwerte in die zweite (VI) (VII) (VIII) übergeführt werden kann, ist eine Vorschrift gezeigt, wie mit Rücksicht auf praktische Forderungen Abbildungen für andere Abzweigungswinkel hergestellt werden können.

3. Zusätze. Die singulären Punkte der Abbildung liegen ausnahmslos auf den Grenzen des Bereichs. Somit sind die in ihnen stattfindenden Winkeländerungen nicht weiter von Interesse. Die (komplexe) Geschwindigkeit an jedem Punkte ist

$$V = \frac{d\,z}{d\,w} = -\frac{z^{0,2}}{w^{0,2}}$$

nach (1). Im Punkte k findet daher Stauung statt, im Punkte h wird die Geschwindigkeit zwar unendlich aber sehr schwach. Nach einer leicht anzustellenden Nachrechnung ist die Geschwindigkeit in der Entfernung von 0,001 der Einheit, vom Punkte h gemessen, in der w_3-Ebene etwa zehnmal größer als in der z-Ebene; in der Entfernung von 0,01 der Einheit treten durchschnittlich in der w_3-Ebene fünfmal so große Geschwindigkeiten auf wie in der z-Ebene. In praktischen Ausführungen entpricht 0,01 der Einheit höchstens dem Maß von 3 mm und ist etwa gleich den Unregelmäßigkeiten des Mauerwerks. Stellt sich im Einzelfalle die Notwendigkeit heraus, rechnungsmäßig geringere Geschwindigkeiten beim Punkte h nachzuweisen, so ist nur der Ursprung der w_2-Ebene in der Verlängerung von $a_1\,k$ über h hinaus weiter zu verschieben. Doch ist dabei zu berücksichtigen, daß die Grenze $h\,d$ erst in größerer Entfernung von h bei der weiteren Abbildung hinreichend gestreckt wird. Eine Störung des Abflusses beim Punkte k ist nicht zu befürchten.

Die rechtwinklige Abzweigung wird in praktischen Ausführungen durch einen Viertelkreis mit etwa der Lichtweite des Stichkanals als Durchmesser ausgebildet. Der dadurch geschaffene Abflußraum unterscheidet sich beträchtlich von dem in Abb. 5 vorgezeichneten. Nach den umfangreichen Versuchen von Weisbach, Lehrbuch der theoretischen Mechanik, fünfte Auflage 1875 bearbeitet von Herrmann, erster Teil, S. 967 soll, um einen möglichst ungestörten Ausfluß des Wassers aus einem Gefäß zu erzielen, das Mundstück nicht nach einem Kreise, sondern nach einer Linie geformt werden, deren Krümmung allmählich abnimmt. Dieser Forderung trägt die Linie $b\,c\,h$ in Abb. 5 Rechnung und erinnert an die Linienführung, die der durch die Erfahrung als zutreffend bestätigten, rechnerisch ermittelten Begrenzung des frei aus einer dünnen Wand austretenden Strahles entspricht (gemäß Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, 1904, Bd. 4, S. 415). Es scheint daher begründet, bei Stichkanälen die Abzweigung mit der Linienführung $b\,c\,h$ nach Abb. 5 symmetrisch zu gestalten.

Aus der Abbildung läßt sich der zweckmäßig zu wählende geringste Zwischenraum der Stichkanäle entnehmen. Bei gegebener Schleusenlänge ergibt sich dadurch eine Höchstzahl von Stichkanälen. Der Querschnitt des Umlaufs wird nach der zulässigen Wassergeschwindigkeit in Verbindung mit der vorgegebenen Schleusungszeit bemessen. Durch die Einteilung der Umlauffläche in die den Stichkanälen zukommenden Stromfäden ergibt sich die Grundfigur der z-Ebene, aus der durch Ausführung der Abbildungen Querschnitt und Ausbildung der Stichkanäle hervorgehen.

Das beschriebene Verfahren kann auch bei anderen ähnlich liegenden Verhältnissen nutzbringend verwandt werden so beim Entwurf von wichtigen Leitungskrümmungen, die entweder eine große Lichtweite besitzen oder die außergewöhnlichen Wassergeschwindigkeiten ausgesetzt werden. 328

Beitrag zur Theorie der Flüssigkeitsbewegung zwischen Zapfen und Lager.

Von **GEORG DUFFING** in Hamburg.

Die Bewegungen zäher Flüssigkeiten sind auf strenger hydrodynamischer Grundlage noch wenig erforscht. Die Schwierigkeiten bei Integration der Bewegungsgleichungen, namentlich dann, wenn die Beschleunigungsglieder berücksichtigt werden sollen, sind so groß, daß heute noch wenig Aussicht besteht, darüber hinweg zu kommen.

Daß diese Probleme auch in der Praxis eine Rolle spielen, zeigen die Bemühungen von Osborne Reynolds, das ebene Problem der Flüssigkeitsbewegung zwischen zwei exzentrischen Kreiszylindern für die Erkenntnis der Schmiermittelreibung nutzbar zu machen [1]). Einer strengen Kritik halten die Arbeiten von Reynolds anscheinend nicht stand, wegen der Vernachlässigungen, die er, über die Beschränkung auf ebene Bewegung und das Absehen von den Beschleunigungsgliedern hinaus, eintreten ließ. Diesen Mangel hat schon A. Sommerfeld bei Untersuchung desselben Gegenstandes [2]) empfunden. Er versucht eine formal etwas »strengere« Behandlung des Integrationsproblems, die jedoch bezüglich der Erfüllung der Randbedingungen auch nicht ohne Bedenken hingenommen werden kann. Sommerfeld zieht einen sehr glücklichen Vergleich zwischen dem Problem der Flüssigkeitsbewegung im Zapfenlager und der Deformation einer durchlochten Platte heran, der wohl geeignet ist, die Strömungsverhältnisse der Anschauung näher zu bringen.

In einer im Jahre 1916 erschienenen Arbeit von G. Hamel über das ebene Problem zäher Flüssigkeiten, die infolge der mathematisch eleganten Behandlung der Differentialgleichung die größte Beachtung verdient, wird unter Berücksichtigung der Beschleunigungsglieder die Bewegung in spiralförmigen Stromlinien verfolgt [3]).

Der Reynoldsschen Theorie wurde von seiten der Ingenieure vielfach kein Vertrauen entgegengebracht [4]) und man entschloß sich zu umfangreichen, sehr kostspieligen Experimentaluntersuchungen. Im Zusammenhang damit schien es mir zweckmäßig zu sein, die Schlüsse von Reynolds und seinen Nachfolgern durch eine exakte Behandlung des ebenen Problems zäher Flüssigkeiten einer Nachprüfung zu unterziehen.

1. Die Grundgleichungen. Zum Ausgangspunkt unserer Untersuchungen nehmen wir, wie Reynolds und Sommerfeld, die Gleichungen für die ebene Bewegung zäher, volumbeständiger Flüssigkeiten:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta u, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta v, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

wobei ein stationärer Zustand vorausgesetzt ist und die quadratischen Glieder, die bei unserem Problem nur untergeordnete Bedeutung haben, vernachlässigt sind. Hier bedeuten u, v die Geschwindigkeitskomponenten in der x- und y-Richtung, p den Druck, μ den Koeffizienten der inneren Reibung und Δ den Laplaceschen Operator $\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Durch Einführung einer Stromfunktion ψ,

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

gehen die beiden ersten Gl. (1) über in

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

während die letzte identisch erfüllt ist. Hieraus ergibt sich leicht

$$\Delta p = 0 \quad \text{und} \quad \Delta \Delta \psi = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

---

[1]) On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. Beauchamp Towess Experiments Philos. Trans. R. Soc. of London 1886; Reproduziert in Engineering 1915.

[2]) Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung, Zeitschr. f. Mathematik u. Physik, 50. Band, 1904.

[3]) Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten von Georg Hamel, Aachen. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, XXV, Teubner 1916.

[4]) O. Lasche, Konstruktion und Material im Bau von Dampfturbinen usw. 2. Aufl., Springer, Berlin 1921, S. 147.

Diese Gleichungen sollen im Falle der Schmiermittelbewegung zwischen Zapfen und Lager erfüllt werden in einem Gebiet, das von zwei im allgemeinen exzentrisch liegenden Kreisen begrenzt ist, und auf dessen Rand folgende Bedingungen gegeben sind: Am äußeren Randteil verschwinden alle Geschwindigkeitskomponenten; am inneren Randteil verschwindet die normale Geschwindigkeitskomponente, während die tangentielle Geschwindigkeitskomponente den konstanten Wert U besitzt. Weitere Randbedingungen für den Druck werden im Laufe der Untersuchung eingeführt.

Bei diesen Randbedingungen eignet sich ein Cartesisches oder Polor-Koordinatensystem nicht gut zur Durchführung der Rechnung, es ist ein isometrisches Koordinatensystem $\xi\eta$ vorzuziehen, dessen Zusammenhang mit x, y durch einen Ansatz von der Form

$$\zeta = \xi + i\eta = w(x + iy) = w(z)$$

gegeben wird. Um die Randbedingungen durch geeignete Wahl von w auf die einfachste Form zu bringen, versuchen wir unser Gebiet G konform auf ein Rechteck Γ abzubilden, nachdem G durch einen Querschnitt in ein einfach zusammenhängendes Gebiet verwandelt ist. Die Abbildung wird geleistet durch die Transformation,

$$\zeta = \log \frac{z-b}{z-a} = w(z) \quad (5),$$

wozu man leicht gelangt, wenn man zunächst vermittels linearer Transformation auf einen konzentrischen Kreisring und von da vermittels des Logarithmus auf das Rechteck übergeht (Abbild. 1).

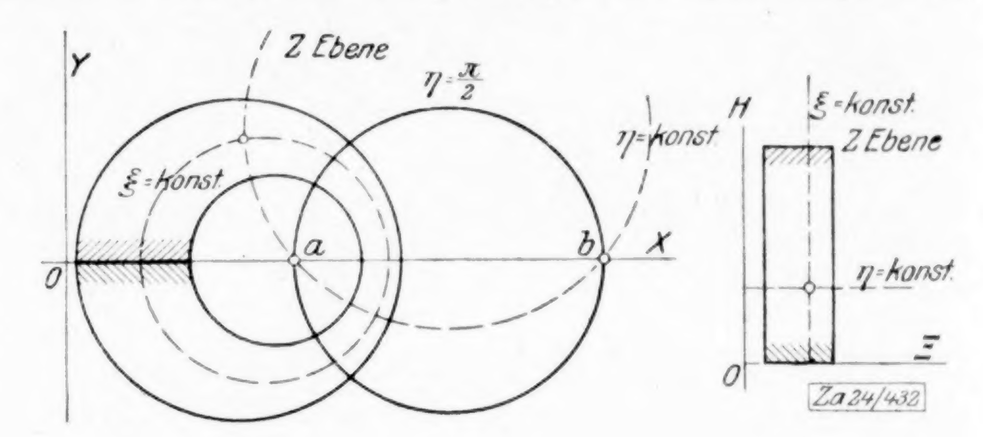


Abb. 1

Die Transformation (5) schreibt sich explicite:

$$\xi = {}^1/_2 \log \frac{(x-b)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}, \quad \eta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-b} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} = \operatorname{arctg} \frac{(b-a)y}{(x-a)(x-b) + y^2}$$

und umgekehrt

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{1 - e^{2\xi}}{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1}, \quad y = \frac{(b-a)e^{\xi}\sin\eta}{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1} \quad . \quad . \quad (6).$$

Den Geraden $\eta =$ konst. im Rechteck entsprechen die Kreise durch die Punkte a und b, den Geraden $\xi =$ konst. die Schaar der Orthogonalkreise, zu denen auch die Randkurven gehören.

2. Transformation auf isometrische Koordinaten. Wir haben nunmehr unsere Differentialgleichungen (3) und (4) auf das System $\xi\eta$ zu transformieren, das durch (6) definiert ist. Daß das Koordinatensystem durch eine konforme Abbildung gewonnen wurde, spielt in der Folge keine nennenswerte Rolle mehr.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

Es sei $\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ der Laplacesche Operator in bezug auf die neuen Koordinaten, dann ist

$$\Delta\psi = M^2\Delta'\psi, \quad \text{wo } M = \left|\frac{dw}{dz}\right|, \quad M^2 = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 \quad . \quad (7).$$

Dann wird

$$\Delta\Delta\psi = M^2\Delta'(M^2\Delta'\psi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

wonach durch einfache Ausrechnung die Transformation der zweiten Gleichung (4) erfolgen kann.

Nach der eingangs erwähnten Arbeit von Hamel ist aber allgemein

$$\Delta\Delta\psi = M^4 \left\{ \Delta'\Delta'\psi + (\alpha^2 + \beta^2)\Delta'\psi + 2\left(\alpha\frac{\partial\Delta'\psi}{\partial\xi} - \beta\frac{\partial\Delta'\psi}{\partial\eta}\right)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

worin α und β definiert sind durch die Beziehung $\alpha + i\beta = 2w'' : w'^2$.

Durch Differentiation von (5) findet man

$$\alpha = \frac{2}{b-a}(b + a - 2x) = 2\frac{e^{2\xi} - 1}{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1} \qquad \beta = -\frac{4y}{b-a} = -4\frac{e^{\xi}\sin\eta}{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1}.$$

Führt man diese Ergebnisse in (9) ein und setzt $\Delta'\psi = \Phi$, so erhält man die transformierte Gleichung in der Form:

$$(e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1)\,\Delta'\Phi + 4\,(e^{2\xi} - 1)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + 8e^{\xi}\sin\eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + 4\,(e^{2\xi} + 2e^{\xi}\cos\eta + 1)\,\Phi = 0 \quad . \quad (10).$$

3. Allgemeine Lösung von (10). Wir haben nun Lösungen der Differentialgleichung (10) aufzusuchen, um daraus schließlich eine Lösung aufzubauen, welche die Randbedingungen befriedigt. Zu diesem Zweck seien neue Variable u und v eingeführt vermittels der Laplaceschen Transformation:

$$u = \xi - i\eta, \quad v = \xi + i\eta; \quad \xi = {}^1/_2\,(u + v), \quad \eta = \frac{i}{2}\,(u - v) \quad . \quad . \quad (11).$$

Das Ergebnis der Transformation ist, da $\Delta'\Phi = 4\,\partial^2\Phi/\partial u\,\partial v$ usf. wird, mit der Abkürzung:

$$\frac{1 + e^u}{1 - e^u} = \chi(u), \qquad \frac{1 + e^v}{1 - e^v} = \chi(v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} - \chi(v)\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \chi(u)\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \chi(u)\,\chi(v)\,\Phi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Wenn man diese Gleichung in bekannter Weise durch eine Lösung $\Phi = UV$, worin U nur von u, V nur von v abhängt, zu befriedigen sucht, so folgt:

$$[U' - U\chi(u)]\,[V' - V\chi(v)] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Die Gl. (13) wird daher befriedigt sowohl durch:

$U = e^{\int\chi(u)\,du}$ bei willkürlichem V als auch durch

$V = e^{\int\chi(v)\,dv}$ » » U,

d. h. die allgemeine Lösung von (13) ist

$$\Phi = e^{\int\chi(u)\,du}\,f(v) + e^{\int\chi(v)\,dv}\,g(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

wo f und g willkürliche Funktionen bedeuten. Setzt man für χ den Wert aus (12) ein, so wird

$$\Phi = \frac{e^u}{(e^u - 1)^2}\,f(v) + \frac{e^v}{(e^v - 1)^2}\,g(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Wir benutzen dieses Resultat, um aus Gl. (10) ψ zu bestimmen. Vermöge (11) wird (16) transformiert in

$$4\,\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} = \frac{e^u}{(e^u - 1)^2}\,f(v) + \frac{e^v}{(e^v - 1)^2}\,g(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist aber, wie leicht einzusehen,

$$\psi = -\frac{1}{e^u - 1}\,F(v) - \frac{1}{e^v - 1}\,G(u) + m(u) + n(v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

wo m und n neue willkürliche Funktionen bedeuten, während

$$F(v) = {}^1/_4\int f(v)\,dv \qquad G(u) = {}^1/_4\int g(u)\,du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18\,a),$$

ist. Infolge der Willkürlichkeit von f und g sind daher auch F und G vollkommen willkürlich.

Wir führen nun in die Lösung (18) wieder unsere ursprünglichen Variabeln $\xi\,\eta$ gemäß (11) ein und es werde dann gesetzt

$$\frac{1}{e^u - 1} = R - iJ, \text{ dann wird } \frac{1}{e^v - 1} = R + iJ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

wo R und J konjugierte harmonische Funktionen von ξ und η bedeuten. Ist ferner

$$\left.\begin{array}{ll} F(v) = F_1(\xi,\eta) + iF_2(\xi,\eta) & n(v) = k(\xi,\eta) + il\,(\xi,\eta) \\ G(u) = G_1(\xi,\eta) - iG_2(\xi,\eta) & m(u) = k_1(\xi,\eta) - il_1(\xi,\eta) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (20),$$

so wird

$$\psi = -R(F_1 + G_1) - J(F_2 + G_2) + k + k_1 + i\{J(F_1 - G_1) - R(F_2 - G_2) + l - l_1\} \quad (21).$$

Bei der Willkürlichkeit von F und G kann man setzen

$$F_1 + G_1 = P(\xi,\eta) \quad F_2 + G_2 = S(\xi,\eta), \quad F_1 - G_1 = Q(\xi,\eta) \quad F_2 - G_2 = T(\xi,\eta) \quad (22),$$

wo P und S, Q und T konjugierte harmonische Funktionen bedeuten.

Man hat also die Lösungen

$$\psi = -RP - JS, \qquad \psi = JQ - RT \quad \ldots \ldots \quad (23),$$

worin einmal P und S konjugierte harmonische Funktionen von ξ und η bedeuten, die im übrigen willkürlich sind, andererseits Q, T die gleiche Bedeutung haben.

Die Glieder $k + k_1$, $l - l_1$ wurden weggelassen, da sie triviale Lösungen darstellen, die der Gleichung $\Delta' = 0$ genügen. Sie können im Bedarfsfalle immer zu den Lösungen (23) hinzugefügt werden.

Es ist leicht einzusehen, daß jeder Lösung

$$\psi_1 = RP + JS \text{ auch eine Lösung } \psi_2 = RS - JP \quad \ldots \quad (24)$$

an die Seite gestellt werden kann, die von ψ_1 unabhängig ist.

4. Geeignete Partikularlösungen. Wir gehen nun dazu über, Partikularlösungen aufzusuchen, die zur Anpassung an die Grenzbedingungen geeignet sind. Zunächst bemerken wir, daß nach (19) R und J Real- und Imaginärteil von $1/e^{\zeta-1}$ sind. Wählen wir dazu

$$\left.\begin{aligned} P &= \Re e \frac{e^{m\zeta}}{e^{\zeta-1}} = \frac{e^{(m+1)\xi}\cos(m-1)\eta - e^{m\xi}\cos m\eta}{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1}, \\ S &= \Im m \frac{e^{m\zeta}}{e^{\zeta-1}} = \frac{e^{(m+1)\xi}\sin(m-1)\eta - e^{m\xi}\sin m\eta}{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (26),$$

so erhalten wir gemäß (24) die Lösungen

$$\psi_1 = \frac{e^{m\xi}\cos m\eta}{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1} \qquad \psi_2 = \frac{e^{m\xi}\sin m\eta}{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1} \quad \ldots \quad (27).$$

Diese Lösungen sind n i c h t harmonisch. Aber auch die harmonischen Funktionen nach (26) sind Lösungen unserer Differentialgleichung (10), von denen wir mit Nutzen Gebrauch machen. Da die Differenzgleichung linear ist, ergeben sich aus (26) und (27) durch Zusammensetzung die n i c h t harmonischen Lösungen.

$$\psi_3 = \frac{e^{(m+2)\xi}\cos m\eta}{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1} \qquad \psi_4 = \frac{e^{(m+2)\xi}\sin m\eta}{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1} \quad \ldots \quad (28).$$

Für $m = 1$ ergibt (27) dieselbe Lösung wie (28) für $m = -1$. Diese Eigentümlichkeit gibt Veranlassung, unsere Differentialgleichung (10) daraufhin zu untersuchen, ob man nicht durch eine Transformation

$$\psi_1 = \frac{1}{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1}\varphi \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

auf eine lineare Differentialgleichung mit k o n s t a n t e m Koeffizienten geführt wird. Diese etwas mühsame Untersuchung wird vereinfacht, wenn man zunächst zu den x, y zurückkehrt, wobei sich herausstellt, daß auf die ursprüngliche Gleichung $\Delta\Delta\psi = 0$ die Transformation $\psi = [(x-a)^2 + y^2]\varphi$ anzuwenden ist. Das Resultat nach Wiedereinführung von ξ, η ist nun in der Tat die Differentialgleichung

$$\Delta'\Delta'\varphi - 4\frac{\partial\Delta'\varphi}{\partial\xi} + 4\Delta'\varphi = 0 \quad \ldots \ldots \quad (30).$$

Machen wir hier die Substitution $\varphi = XY$, wo X nur von ξ, Y nur von η abhängt, und setzen wir $Y = \cos m\eta$, $\sin m\eta$, so bestimmt sich X aus

$$X^{IV} - 4X''' + (4 - 2m^2)X'' + 4m^2X' + (m^4 - 4m^2)X = 0 \quad \ldots \quad (31).$$

Es wird

$$X = e^{\lambda\xi} \text{ mit } \lambda^4 - 4\lambda^3 + (4 - 2m^2)\lambda^2 + 4m^2\lambda + m^4 - 4m^2 = 0 \quad \ldots \quad (32).$$

Die Wurzeln der λ-Gleichung sind

$$\lambda_1 = m \qquad \lambda_2 = -m \qquad \lambda_3 = m + 2 \qquad \lambda_4 = -m + 2.$$

Auf diesem Wege gewinnt man auch zugleich die Lösungen für den Fall gleicher Wurzeln, die bei $m = 0$ und $m = 1$ auftreten. Wir haben daher zu jedem m außer 0,1 die vier Lösungen

$$X = e^{m\xi} \qquad e^{-m\xi} \qquad e^{(m+2)\xi} \qquad e^{(-m+2)\xi}$$

Im Falle $m = 0$ jedoch

$$1 \qquad \xi \qquad e^{2\xi} \qquad \xi e^{2\xi}$$

Im Falle $m = 1$

$$e^{\xi} \qquad e^{-\xi} \qquad e^{3\xi} \qquad \xi e^{\xi}.$$

Jetzt ist das System der Partikularlösungen so vervollständigt, daß wir daraus eine den Randbedingungen genügende Lösung aufbauen können. Mit Rücksicht auf (29) erhält die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung $\Delta\Delta\psi = 0$ die Form

$$\psi = \frac{1}{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1} \sum_{m=0}^{m=\infty} \begin{Bmatrix} [A_m e^{m\xi} + B_m e^{-m\xi} + C_m e^{(m+2)\xi} + D_m e^{(-m+2)\xi}] \cos m\eta \\ [E_m e^{m\xi} + F_m e^{-m\xi} + G_m e^{(m+2)\xi} + H_m e^{(-m+2)\xi}] \sin m\eta \end{Bmatrix} \quad (33).$$

Der Ansatz enthält die genügende Anzahl verfügbarer Konstanten, so daß man auf dem Rande des Gebietes ($\xi = \xi_1$ und $\xi = \xi_2$) sowohl den Verlauf von ψ, als auch von $\frac{d\psi}{dn}$, wo n die innere Normale bedeutet, vorschreiben kann. Wenn wir gemäß diesen Bedingungen die Koeffizientenbestimmung vornehmen, wird das zweidimoniale Problem der Strömung einer zähen volumbeständigen Flüssigkeit im exzentrischen Kreisring gelöst.

Beim vollständigen Kreisring durchläuft m die Reihe der positiven natürlichen Zahlen, beim Ringabschnitt, den wir später betrachten werden, sind für m die natürlichen Vielfachen der Einheit $\frac{\pi}{l}$ oder $\frac{2\pi}{l}$, wo l die Länge des Abschnittes bestimmt, zu wählen.

Die vorstehende Untersuchung gilt übrigens auch für die Gleichgewichtsform einer dünnen unbelasteten elastischen Platte, deren Durchbiegung durch ψ repräsentiert wird. Es ist daher mit (33) auch die Aufgabe gelöst: Die Deformation einer dünnen, unbelasteten elastischen Platte, welche die Gestalt eines exzentrischen Kreisringes besitzt, zu bestimmen, wenn die Gestalt des Randes und die Richtung der Randnormalen gegeben sind.

5. Fall des geschlossenen Ringes. Wir gehen zur Untersuchung des vollständigen Kreisringes über und drücken zunächst die Randbedingungen in unserem isometrischen Koordinaten aus. Wir haben dabei zunächst zu beachten, daß die Länge des Bogenelementes ds und seiner Abbildung $d\sigma$ in dem Zusammenhang

$$\frac{d\sigma}{ds} = M = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

stehen. Aus den Gleichungen (2) folgt für die Komponenten u_s, u_n der Geschwindigkeit in dem mit X, Y gleichsinnigen System s, n (s Tangente und n äußere Normale am inneren Kreis)

$$u_s = M\frac{\partial\psi}{\partial\xi}, \qquad u_n = M\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35),$$

wobei, um es noch besonders zu betonen, die Richtung s im Sinne wachsender η, die Richtung n im Sinne abnehmender ξ genommen wurde.

Nach (6) und (7) ist, da $b > a$ angenommen wurde,

$$M = \frac{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1}{(b-a)\,e^{\xi}} = \frac{2(\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\eta)}{b-a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Da sowohl die innere wie die äußere Begrenzung eine Stromlinie ist, so hat ψ auf beiden Begrenzungen je einen konstanten Wert. Es kann daher gesetzt werden

$\psi = 0$ auf dem inneren Rand $\xi = \xi_1$, $\psi = Q$ auf dem äußeren Rand $\xi = \xi_2$ (37),

worin $-Q$ die in der Zeiteinheit durch den Film von der axialen Ausdehnung 1 in der Richtung $+\eta$ strömende Flüssigkeitsmenge bedeutet. Da ferner die Flüssigkeit an den Wänden haftet, ist

$$u_s = M\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = U \text{ für } \xi = \xi_1, \quad u_s = M\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = 0 \text{ für } \xi = \xi_2 \quad . \quad . \quad . \quad (38),$$

wo U die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens bedeutet.

Wir betrachten jetzt die Funktion:

$$(b-a)\,e^{\xi}\,M\,\psi = \mathfrak{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39),$$

wo also $\mathfrak{F}$ die in η periodische Reihe auf der rechten Seite von (33) darstellt. Die Differentiation von (39) nach ξ ergibt mit $u_s = M\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$ die Beziehung $2[e^{2\xi} - e^{\xi}\cos\eta]\,\psi + (b-a)e^{\xi}u_s = \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\xi}$.

Zusammenfassend hat man daher die Randbedingungen:

$$\psi = 0,\ (b-a)\,e^{\xi_1}\,U = \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\xi} \text{ für } \xi = \xi_1$$

$$\psi = Q,\ 2\,[e^{2\xi_2} - e^{\xi_2}\cos\eta]\,Q = \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\xi} \text{ für } \xi = \xi_2$$

und weil $M \neq 0$ zur Koeffizientenbestimmung die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_1 \quad \mathfrak{F} = 0 \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi} = (b-a)\, U e^{\xi_1} \\ \xi &= \xi_2 \quad \mathfrak{F} = Q\,[e^{2\xi_2} - 2 e^{\xi_2} \cos\eta + 1] \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi} = 2\,[e^{2\xi_2} - e^{\xi_2}\cos\eta]\, Q \end{aligned}\right\} \quad (40).$$

Hieraus ist sofort zu ersehen, daß alle Bedingungen exakt erfüllbar sind, wenn man von der Reihe $\mathfrak{F}$ nur 2 Glieder in Rücksicht zieht und setzt

$$\mathfrak{F} = A_0 + B_0\,\xi + (C_0 + D_0\,\xi)\, e^{2\xi} + [(A_1 + B_1\,\xi)\, e^{\xi} + C_1\, e^{-\xi} + D_1\, e^{3\xi}] \cos\eta \quad (41).$$

Die Randbedingungen ergeben dann folgende Gleichungssysteme zur Bestimmung vo A_0 D_0 und A_1 D_1:

$$\left.\begin{aligned} B_0 + 2\,C_0\, e^{2\xi_1} + D_0\,(e^{2\xi_1} + 2\,\xi_1\, e^{2\xi_1}) &= (b-a)\, e^{\xi_1}\, U \\ B_0 + 2\,C_0\, e^{2\xi_2} + D_0\,(e^{2\xi_2} + 2\,\xi_1\, e^{2\xi_2}) &= 2\, e^{\xi_2}\, Q \\ A_0 + B_0\,\xi_1 + C_0\, e^{2\xi_1} + D_0\,\xi_1\, e^{2\xi_1} &= 0 \\ A_0 + B_0\,\xi_2 + C_0\, e^{2\xi_2} + D_0\,\xi_2\, e^{2\xi_2} &= (e^{2\xi_2} + 1)\, Q \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1\, e^{\xi_1} + B_1\,(e^{\xi_1} + \xi_1\, e^{\xi_1}) - C_1\, e^{-\xi_1} + 3\, D_1\, e^{3\xi_1} &= 0 \\ A_1\, e^{\xi_2} + B_1\,(e^{\xi_2} + \xi_2\, e^{\xi_2}) - C_1\, e^{-\xi_2} + 3\, D_1\, e^{3\xi_2} &= -2\, e^{\xi_2}\, Q \\ A_1\, e^{\xi_1} + B_1\,\xi_1\, e^{\xi_1} + C_1\, e^{-\xi_1} + D_1\, e^{3\xi_1} &= 0 \\ A_1\, e^{\xi_2} + B_1\,\xi_2\, e^{\xi_2} + C_1\, e^{-\xi_2} + D_1\, e^{3\xi_2} &= -2\, e^{\xi_2}\, Q \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

Um diese Gleichungen aufzulösen, haben wir die Determinanten der beiden Systeme (42), (43) und ihre Minoren ersten Grades zu berechnen. Die erste Determinante hat den Wert

$$N_0 = 2\, e^{2\xi_1 + 2\xi_2}\,[1 + 2\,(\xi_1 - \xi_2)^2] - e^{4\xi_1} - e^{4\xi_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Die Minoren sind einfache Funktionen von ξ_1 und ξ_2, z. B.

$$\alpha_{11} = e^{2\xi_1 + 2\xi_2}\,[-\xi_1 + 2\,\xi_1\,\xi_2 - 2\,\xi_2^2] + \xi_1\, e^{4\xi_2}$$

$$\alpha_{21} = e^{2\xi_1 + 2\xi_2}\,[-\xi_2 + 2\,\xi_1\,\xi_2 - 2\,\xi_1^2] + \xi_2\, e^{4\xi_1} \text{ usw.}$$

Die Determinente des zweiten Gleichungssystems ist

$$N_1 = 4\, e^{4\xi_1}\,(1 - \xi_1 + \xi_2) + 4\, e^{4\xi_2}\,(1 + \xi_1 - \xi_2) - 8\, e^{2\xi_1 + 2\xi_2} \quad . \quad . \quad . \quad (45),$$

ihre ersten Minoren sind

$$\alpha_{11} = e^{4\xi_2 - \xi_1}\,(1 - 2\,\xi_2) - e^{3\xi_1}\,(1 + 2\,\xi_2) + 4\,\xi_1\, e^{\xi_1 + 2\xi_2}$$

$$\alpha_{21} = e^{4\xi_1 - \xi_2}\,(1 - 2\,\xi_1) - e^{3\xi_2}\,(1 + 2\,\xi_1) + 4\,\xi_2\, e^{\xi_2 + 2\xi_1}.$$

Darnach können bei gegebenen ξ_1, ξ_2 die Konstanten $A_0\,B_0\,C_0\,D_0$ durch U und Q, die Konstanten $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ durch Q ausgedrückt werden. Die explicite Darstellung unterlassen wir, da sie besser erst im konkreten Zahlenbeispiel vorgenommen wird. Zwischen U und Q, die bisher ganz unabhängig von einander waren, werden wir eine Beziehung finden, indem wir daran gehen, den Verlauf des Druckes zu verfolgen.

6. Die Druckbedingung beim geschlossenen Ring. Orientieren wir unser Koordinatensystem X, Y vorübergehend nach den Richtungen s und n, so ergeben die Gleichungen (3) mit Rücksicht auf die erste Gl. (7):

$$-\frac{\partial p}{\partial \xi} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu}\,[M^2 \Delta' \psi], \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = \mu \frac{\partial}{\partial \xi}\,[M^2 \Delta' \psi] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Zur Weiterführung der Rechnung haben wir nun die Differentialparameter $\Delta' \psi$ unserer Partikularlösungen (41) zu bestimmen. Die Ermittelung auf direktem Wege ist umständlich. Man tut gut, ψ in zwei Faktoren U, V zu zerlegen, von denen entweder einer oder beide harmonisch sind, und benutzt dann die Formel:

$$\Delta'(U V) = U \Delta' V + V \Delta' U + 2\left[\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Als den einen Faktor wählt man z. B. den rezipoken Wert von $e^{2\xi} - 2e \cos\eta + 1$.

Die Rechnung ergibt dann, wenn für ψ der Wert aus (41) und (39) eingesetzt wird:

$$-\frac{(b-a)^2}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \xi} = [-4\,B_0\, e^{-\xi} + 4\,D_0\, e^{\xi} + 2\,B_1\,(e^{\xi} - e^{-\xi}) - 8\,C_1\, e^{-\xi} - 8\,D_1\, e^{\xi}] \sin\eta + [8\,C_1\, e^{-2\xi} + 8\,D_1\, e^{2\xi}] \sin 2\eta \quad (48)$$

und

$$\frac{(b-a)^2}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \eta} = 4\,[B_0 + D_0 + B_1] + [-4\,B_0\, e^{-\xi} - 4\,D_0\, e^{\xi} - 2\,B_1\,(e^{\xi} + e^{-\xi}) - 8\,C_1\, e^{-\xi} + 8\,D_1\, e^{\xi}] \cos\eta + [8\,C_1\, e^{-2\xi} - 8\,D_1\, e^{2\xi}] \cos 2\eta \quad (49).$$

Durch Integration erhält man aus diesen beiden Beziehungen den Druck p an jedem Punkt ξ, η in der Form

$$\frac{(b-a)^2}{\mu} p = K + 4(B_0 + D_0 + B_1)\eta - [4 B_0 e^{-\xi} + 4 D_0 e^{\xi} + 2 B_1 (e^{\xi} + e^{-\xi}) + 8 C_1 e^{-\xi} - 8 D_1 e^{\xi}] \sin\eta + 4 [C_1 e^{-2\xi} - D_1 e^{2\xi}] \sin 2\eta \quad (50),$$

worin K eine willkürliche Konstante bedeutet. Soll der Druckverlauf im vollständigen Kreisring eindeutig und stetig sein, so muß das nicht-periodische Glied in (50) wegfallen, also

$$B_0 + D_0 + B_1 = 0 \quad (51)$$

sein. Diese Bedingung liefert dann letzten Endes den Zusammenhang zwischen Q und U.

Beim Ringabschnitt sind K und $B_0 + D_0 + B_1$ bestimmt, sobald der Druck an einem Punkt eines jeden der beiden Endquerschnitte vorgeschrieben ist. Sind jedoch an den Endquerschnitten weitere Randbedingungen für p oder ψ vorgeschrieben, so muß die Untersuchung abgeändert werden, worauf wir weiter unten eingehen wollen.

Die Resultate nehmen eine noch handlichere Gestalt an, wenn der Ring in der Richtung der Koordinate ξ eine sehr geringe Ausdehnung hat, wie es bei der Schmiermittelreibung der Fall ist. Wir setzten also jetzt $\xi_2 = \xi_1 - \delta$, wo δ eine gegen ξ_1 kleine Zahl bedeutet, und berücksichtigen nur die Anfangsglieder der Entwicklungen. Die Minoren unseres ersten Systems linearer Gleichungen werden alsdann, wenn gerade so viele Glieder angeschrieben werden, wie sie bei den späteren Entwicklungen erforderlich sind:

$$\alpha_{11} = e^{4\xi_1}\left[2(\xi_1 - 1)\delta^2 + 4\left(1 - \frac{4}{3}\xi_1\right)\delta^3\right] \qquad \alpha_{12} = e^{4\xi_1}\left[-2\delta^2 + \frac{16}{3}\delta^3\right] \text{ usw.}$$

Die Determinante selbst wird:

$$N_0 = -\frac{4}{3} e^{4\xi_1}\delta^4 + \frac{8}{3} e^{4\xi_1}\delta^5 - \frac{128}{45} e^{4\xi_1}\delta^6$$

Die Minoren des zweitens Systems ergeben sich zu

$$\alpha_{11} = e^{3\xi_1}\left[-8\xi_1\delta^2 + \left((16\xi_1 + \frac{16}{3}\right)\delta^3\right] \qquad \alpha_{12} = e^{3\xi_1}[8\delta^2 - 16\delta^3] \text{ usf.,}$$

die Determinante

$$N_1 = -\frac{16}{3} e^{4\xi_1}\delta^4 + \frac{32}{3} e^{4\xi_1}\delta^5 - \frac{136}{45} e^{4\xi_1}\delta^6$$

Hiermit können die Konstanten $A_v B_v$ usw. berechnet werden. Es ist aber zu beachten, daß der Wert $(b-a)U$ sehr groß gegen Q ist, so daß die Minoren der ersten Zeile von N_0 nicht vernachlässigt werden dürfen.

Man erhält mit $(b-a)U\delta = Q_0$

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= -{}^3/_2(\xi_1 - 1)[Q_0 e^{\xi_1} + 2(e^{2\xi_1} + 1)Q]\delta^{-3} + Q_0\xi_1 e^{\xi_1}\delta^{-2} \\
&\qquad - Q[e^{2\xi_1}({}^3/_2 - 3\xi_1) - {}^3/_2]\delta^{-2} \\
B_0 &= {}^3/_2[Q_0 e^{\xi_1} + 2(e^{2\xi_1} + 1)Q]\delta^{-3} - Q_0 e^{\xi_1}\delta^{-2} - 3Q e^{2\xi_1}\delta^{-2} \\
C_0 &= -{}^3/_2(\xi_1 + 1)e^{-2\xi_1}[Q_0 e^{\xi_1} + 2(e^{2\xi_1} + 1)Q]\delta^{-3} \\
&\qquad - Q_0\xi_1 e^{-\xi_1}\delta^{-2} + Q[{}^3/_2 - ({}^3/_2 + 3\xi_1)e^{-2\xi_1}]\delta^{-2} \\
D_0 &= {}^3/_2 e^{-2\xi_1}[Q_0 e^{\xi_1} + 2(e^{2\xi_1} + 1)Q]\delta^{-3} + Q_0 e^{-\xi_1}\delta^{-2} \\
&\qquad + 3Q e^{-2\xi_1}\delta^{-2}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (52)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= -6\xi_1 Q\delta^{-3} + 3Q\delta^{-2}, & B_1 &= 6Q\delta^{-3} - * \\
C_1 &= {}^3/_2 e^{2\xi_1} Q\delta^{-3} - {}^3/_2 e^{2\xi_1} Q\delta^{-2}, & D_1 &= -{}^3/_2 e^{-2\xi_1} Q\delta^{-3} - {}^3/_2 e^{-2\xi_1} Q\delta^{-2}
\end{aligned}\right\} \quad (53).$$

Die Bedingung $B_0 + D_0 + B_1 = 0$ für den geschlossenen Kreisring ergibt

$$Q = -{}^1/_2 Q_0 \frac{\mathfrak{Cof}\,\xi_1}{\mathfrak{Cof}\,2\xi_1 + 2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54).$$

Damit sind dann alle Koeffizienten durch die Umfangsgeschwindigkeit U bestimmt, die Strömungsvorgänge und die Druckverteilung (abgesehen von einer additiven Konstanten K) vollständig beschrieben.

Die Formel (50) für den Druck wird besonders einfach, wenn man sich auf die Zapfenoberfläche beschränkt. Man erhält durch Einsetzen von $\xi = \xi_1$, $\xi_2 = \xi_1 - \delta$ und Entwicklung nach δ, nach Umformungen:

$$\frac{(b-a)^2}{\mu} p = K + 12\delta^{-3}[\mathfrak{Cof}\,\xi_1 Q_0 + (2\,\mathfrak{Cof}\,2\xi_1 + 4)Q]\eta - 12\delta^{-3}[Q_0 + 8\,\mathfrak{Cof}\,\xi_1 Q]\sin\eta + 12Q\delta^{-3}\sin 2\eta \quad (55).$$

Unter Benutzung von (54) wird für den vollständigen Ring

$$\frac{(b-a)^2}{\mu} p = K + 12\,\delta^{-3} Q_0 \left[\frac{\mathfrak{Cof}\, 2\,\xi_1}{\mathfrak{Cof}\, 2\,\xi_1 + 2} \sin\eta - {}^1/_2\, \frac{\mathfrak{Cof}\,\xi_1}{\mathfrak{Cof}\, 2\,\xi_1 + 2} \sin 2\,\eta\right] \quad . \quad (56).$$

7. Der Zapfendruck. Aus dem Druckverteilungsgesetz (55), das wir in der Form

$$p = \mathfrak{K} + \mathfrak{A}\,\eta + \mathfrak{B} \sin\eta + \mathfrak{C} \sin 2\,\eta \quad (57)$$

zur Abkürzung schreiben wollen, sollen nun die Komponenten der Druckresultante für einen durch die Endkoordinaten η_1, η_2 definierten Teil der Zapfenoberfläche berechnet werden.

Die Elementarkomponenten sind $p\,dx$ in der Richtung der Y-Achse und $-p\,dy$ in Richtung der X-Achse.

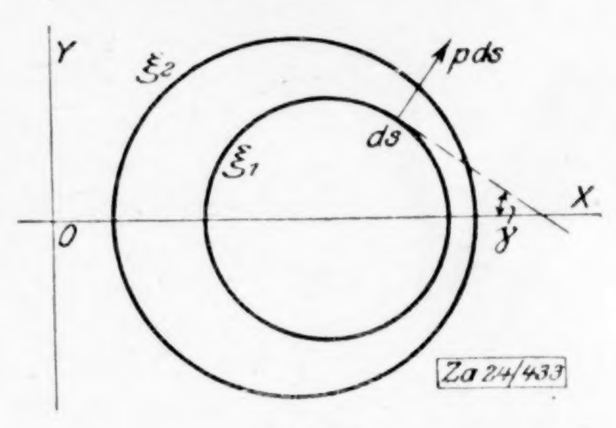


Abb. 2

Man hat daher die erste Komponente (für ein endliches Stück des Zapfenumfangs)

$$P_0 = \int_{\eta_2}^{\eta_1} p \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta = \Big|_{\eta_2}^{\eta_1} p x - \int_{\eta_2}^{\eta_1} x \frac{\partial p}{\partial \eta} d\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58)$$

und die zweite Komponente

$$-P = \int_{\eta_2}^{\eta_1} p \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta = \Big|_{\eta_2}^{\eta_1} p y - \int_{\eta_2}^{\eta_1} y \frac{\partial p}{\partial \eta} d\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (59),$$

wenn wie beim Schmierfilm p für $\eta = \eta_1$ und $\eta = \eta_2$ verschwindet, so ist einfach

$$P_0 = -\int_{\eta_2}^{\eta_1} x \frac{\partial p}{\partial \eta} d\eta, \qquad P = +\int_{\eta_2}^{\eta_1} y \frac{\partial p}{\partial \eta} d\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (60).$$

Differenziert man (57) nach η, benutzt (6) um x, y durch ξ, η auszudrücken, und führt die Bezeichnung

$$J = \int \frac{d\eta}{\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\eta} = \frac{2}{\mathfrak{Sin}\,\xi} \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{\mathfrak{Cof}\,\xi + 1}{\mathfrak{Cof}\,\xi - 1}} \operatorname{tg}\frac{\eta}{2}\right] = \frac{2}{\mathfrak{Sin}\,\xi} \operatorname{arctg}\left[\mathfrak{Cot}\frac{\xi}{2} \operatorname{tg}\frac{\eta}{2}\right] \quad (61)$$

ein, so ergibt sich für die Zapfenoberfläche $\xi = \xi_1$

$$P_0 = \frac{b-a}{2} \mathfrak{Sin}\,\xi_1 \Big[-(\mathfrak{B} + 4\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{Cof}\,\xi_1)\,\eta - 4\,\mathfrak{C} \sin\eta + (\mathfrak{A} - 2\,\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{Cof}\,\xi_1 + 4\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{Cof}^2\,\xi_1)\,J\Big]_{\eta_2}^{\eta_1} \quad (62)$$

als y Komponente des Zapfendruckes. Hier sind für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{K}$ die Werte einzusetzen, die aus dem Vergleich von (57) mit (55) hervorgehen. So erhält man

$$P_0 = \frac{6\,\mu\,\delta^{-3}}{b-a} \Big[(Q_0 + 4\,Q\,\mathfrak{Cof}\,\xi_1)\,\eta - 4\,Q \sin\eta\Big]_{\eta_2}^{\eta_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (63).$$

In gleicher Weise berechnet man aus der zweiten Gl. (60):

$$P = \frac{6\,\mu\,\delta^{-3}}{b-a} \Big[-(Q_0 + 4\,Q\,\mathfrak{Cof}\,\xi_1) \cos\eta + Q \cos 2\,\eta\Big]_{\eta_2}^{\eta_1} \quad . \; . \; . \; . \quad (64)$$

als Komponente des vom Zapfen in der Richtung der positiven X-Achse auf die Flüssigkeit ausgeübten Druckes.

8. Das Reibungsmoment. Die von der Zapfenoberfläche auf die Flüssigkeit ausgeübte tangential gerichtete Reibungskraft ist pro Flächeneinheit

$$q = \mu \left[\frac{d\,u_n}{d\,s} + \frac{d\,u_s}{d\,n}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (65).$$

Setzt man hier für u_s, u_n die Werte aus (35) ein und beachtet den Zusammenhang von ds, dn mit $d\xi$, $d\eta$, so erhält man

$$\frac{d\,u_n}{d\,s} + \frac{d\,u_s}{d\,n} = M \left[\frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right] + M^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}\right].$$

Nun ist gemäß unseren Grenzbedingungen an der Zapfenoberfläche ($\xi = \xi_1$)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \text{ also auch } \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0, \text{ ferner } \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{1}{M} U$$

Es wird daher an der Zapfenoberfläche

$$\frac{d u_n}{d s} + \frac{d u_s}{d n} = - U \frac{\partial M}{\partial \xi} - M^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = - U \frac{\partial M}{\partial \xi} - M^2 \Delta' \psi .$$

Die dem Zapfen-Reibungsmoment entsprechende Reibungkraft ist dementsprechend

$$\mathfrak{R} = \int_{s_2}^{s_1} q \, d s = - \mu \left\{ U \int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial \xi} d \eta + \int_{\eta_2}^{\eta_1} M \Delta' \psi \, d \eta \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66).$$

Wir ermitteln zunächst für $\xi = \xi_1$ den Wert von $\int M \Delta' \psi \, d \eta$.

Nach (41) erhält man

$$M \Delta' \psi = \frac{2}{(b-a) [\mathfrak{Cof}\, \xi_1 - \cos \eta]} \left\{ \begin{array}{l} A_0 - B_0 + C_0 + D_0 + A_1 + [B_0 + D_0 + B_1]\, \xi_1 + C_1 e^{-2 \xi_1} + D_1 e^{2 \xi_1} \\ + \left[B_0 e^{-\xi_1} - D_0 e^{\xi_1} - B_1 \dfrac{e^{\xi_1} - e^{-\xi_1}}{2} + 2 C_1 e^{-\xi_1} + 2 D_1 e^{\xi_1} \right] \cos \eta \\ - [2 C_1 e^{-2 \xi_1} + 2 D_1 e^{2 \xi_1}] \cos^2 \eta \end{array} \right\} \quad (67).$$

Das Integrationsgeschäft erledigt sich einfach mit Rücksicht auf die Beziehuugen

$$\int \frac{d \eta}{\mathfrak{Cof}\, \xi_1 - \cos \eta} = J_1 \qquad \int \frac{\cos \eta}{\mathfrak{Cof}\, \xi_1 - \cos \eta} d \eta = - \eta + \mathfrak{Cof}\, \xi_1 J_1 \qquad \int \frac{\cos^2 \eta}{\mathfrak{Cof}\, \xi_1 - \cos \eta} d \eta$$
$$= - \mathfrak{Cof}\, \xi_1 \eta - \sin \eta + \mathfrak{Cof}^2 \xi_1 J_1 \quad (68).$$

Wir führen die Werte von $A_0 B_0 \ldots A_1 B_1 \ldots$ aus (52) und (53) ein. Wie schon früher bemerkt, müssen hier höhere Potenzen von δ berücksichtigt werden, da sich bei der folgenden Rechnung die Anfangsglieder zum großen Teil gegenseitig tilgen.

Wird dann noch das erste Glied rechts in (66)

$$U \int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial \xi} d \eta = U \mathfrak{Sin}\, \xi_1 \Big[J_1 \Big]_{\eta_2}^{\eta_1} = \frac{Q_0 \delta^{-1}}{b - a} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

wegen seiner Kleinheit weggelassen, so ergibt sich

$$\frac{b-a}{2} \frac{\mathfrak{R}}{\mu} = \left[\begin{array}{l} \{ Q_0 (e^{\xi_1} + e^{-\xi_1}) \delta^{-2} + Q [{}^3/_2 (e^{2 \xi_1} + e^{-2 \xi_1}) + 3] \delta^{-2} \} J_1 \\ + \{ - 2 Q_0 \delta^{-2} - 6 Q (e^{\xi_1} + e^{-\xi_1}) \delta^{-2} \} (- \eta + \mathfrak{Cof}\, \xi_1 J_1) \\ + 6 Q \delta^{-2} (- \mathfrak{Cof}\, \xi_1 \eta - \sin \eta + \mathfrak{Cof}^2 \xi_1 J_1 \end{array} \right]_{\eta_2}^{\eta_1} \quad . \quad . \quad . \quad (68).$$
$$= 2 Q_0 \delta^{-2} \eta + (6 \mathfrak{Cof}\, \xi_1 \eta - 6 \sin \eta) Q \delta^{-2}$$

An diesen Resultaten (63), (64) ist zunächst überraschend, daß $J_1 = \int \frac{d \eta}{\mathfrak{Cof}\, \xi_1 - \cos \eta}$ überall herausfällt. Bei genauerem Zusehen findet man die Erklärung darin, daß die betreffenden Integranden durch $\mathfrak{Cof}\, \xi_1 - \cos \eta$ ohne Rest teilbar sind. In der Tat überzeugt man sich leicht davon, daß

$$M \Delta' \psi = \frac{2}{b - a} \left\{ 6 Q \cos \eta - 6 Q \mathfrak{Cof}\, \xi_1 - 2 Q_0 \right\} \delta^{-2}$$

Die Reibungskraft $\mathfrak{R}'$ an der Lagerschale ist **verschieden** von $\mathfrak{R}$ und wird genau durch denselben Rechnungsgang erhalten, indem wir in (66) $\xi = \xi_2$ setzen. Führt man die Rechnung durch, so ergibt sich

$$\frac{b-a}{2} \frac{\mathfrak{R}'}{\mu} = - Q_0 \delta^{-2} \eta - (6 \mathfrak{Cof}\, \xi_1 \eta - 6 \sin \eta) Q \delta^{-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69).$$

Zwischen den Momenten $\mathfrak{M}\ \mathfrak{M}'$ der Kräfte $\mathfrak{R}\ \mathfrak{R}'$ besteht unter der Voraussetzung, daß in den Endquerschnitten der Flüssigkeitsschicht $p = 0$ ist, die Beziehung

$$\mathfrak{M} - P_0 f = \mathfrak{M}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70),$$

wie unter Benutzung der Formeln des folgenden Abschnittes leicht nachzuweisen ist (f Entfernung von Mitte Zapfen bis Mitte Lagerschale).

9. Einige geometrische Beziehungen. Wären als Ausgangspunkt für die numerische Berechnung die Größen $b - a$ ξ_1 ξ_2 η, η_2 gegeben, so wäre durch die vorangehenden Entwickelungen unsere Aufgabe im Wesentlichen als gelöst zu betrachten. In der Regel hat man aber andere Unterlagen: Radius r des Zapfens, Radius R der Lager-

schale, kleinste Entfernung zwischen Zapfen und Schalenoberfläche, Umfassungswinkel der Schale usw. Wir müssen daher zur Klarstellung des Zusammenhanges zwischen diesen Größen einige elementare Betrachtungen einschalten.

Setzt man in den Gl. (6) $\xi = \text{Konst.}$, so erhält man in der x-y-Ebene einen bestimmten Kreis, dessen Größe und Lage wir zunächst bestimmen wollen. Die Schnittpunkte mit der Abscissenachse werden bestimmt durch

$$\eta = 0,\ x_1 = -\frac{b-a}{2}\,\frac{e^{\xi}+1}{e^{\xi}-1}\,;\ \eta = \pi,\ x_2 = -\frac{b-a}{2}\,\frac{e^{\xi}-1}{e^{\xi}+1}$$

Da der Kreismittelpunkt auf der Abscissenachse liegt, hat man mit der Abkürzung $e^{\xi} = z$ den Radius

$$r = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{b-a}{z - z^{-1}} = \frac{b-a}{2\,\mathfrak{Sin}\,\xi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Die Abscisse des Kreismittelpunktes ist

$$d = {}^1/_2\,(x_1 + x_2) = -\frac{b-a}{2}\,\frac{z^2+1}{z^2-1} = -\frac{b-a}{2}\,\mathfrak{Cot}\,\xi = -r\,\mathfrak{Cos}\,\xi \quad \ldots \quad (2).$$

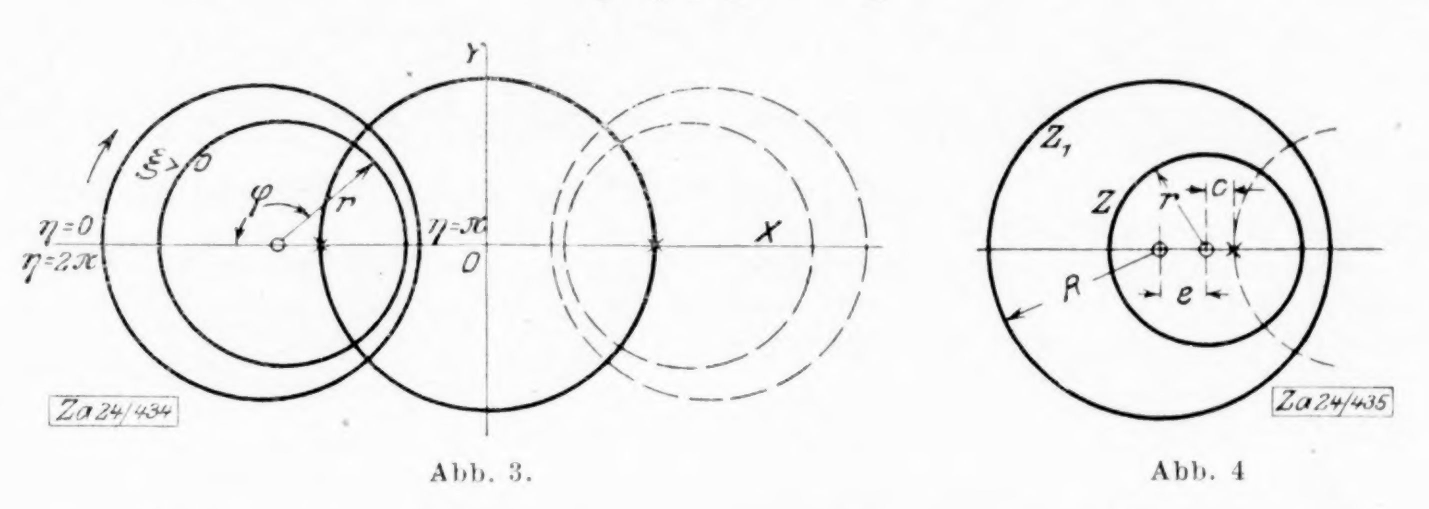


Abb. 3. Abb. 4

Der Abstand des Mittelpunktes von dem nächsten Hauptpunkt ist

$$c = -\frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2}\,\frac{z^2+1}{z^2-1} = \frac{b-a}{z^2-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Daraus folgt nebenbei $\frac{r}{c} = z,\ \xi = \log\frac{r}{c}$ . . . . (4).

Wir haben nunmehr folgende Aufgabe zu lösen: Es seien gegeben 2 Kreise mit den Radien r und R und dem Mittelpunktsabstand f; zu bestimmen z z_1 $b-a$ und c aus den Gleichungen

$$r = \frac{(b-a)\,z}{z^2-1} \qquad c = \frac{b-a}{z^2-1}, \qquad R = \frac{(b-a)\,z_1}{z_1^{\,2}-1} \qquad c + f = \frac{b-a}{z_1^{\,2}-1}$$

Man erhält zunächst

$$b - a = f\,\frac{(z^2-1)\,(z_1^{\,2}-1)}{z^2 - z_1^{\,2}}$$

und hiermit zur Bestimmung von z und z_1 nach einfacher Rechnung die quadratische Gleichung

$$z^2 - \frac{R^2-r^2-f^2}{f\,r}\,z = -1, \text{ also } z = {}^1/_2\,\frac{R^2-r^2-f^2}{f\,r} \pm \sqrt{\left(\frac{R^2-r^2-f^2}{2\,f\,r}\right)^2 - 1} \quad . \quad (6).$$

Wir machen die Annahme, daß ξ mithin $\mathfrak{Sin}\,\xi = {}^1/_2\left(z - \frac{1}{z}\right)$ positiv sein soll, und ersehen dann, daß nur das obere Vorzeichen in (6) gilt.

Bei der Schmierung von Gleitlagern sind die Radien r und R sehr wenig verschieden, so daß gesetzt werden kann

$$R = r + \Delta \text{ wo } \frac{\Delta}{r} \text{ eine kleine Zahl} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

In diesem Fall setzen wir $f = \varkappa\,\Delta$ wo $0 < \varkappa < 1$. Mit diesen Bezeichnungen wird

$$z = \frac{1}{\varkappa} + \frac{1-\varkappa^2}{2\,\varkappa}\,\frac{\Delta}{r} + \frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa}\left(1 + \frac{\Delta}{2\,r}\right) = \frac{1}{\varkappa}\,(1 + \sqrt{1-\varkappa^2})\left[1 + {}^1/_2\sqrt{1-\varkappa^2}\,\frac{\Delta}{r}\right]$$

Für Werte von $\varkappa$, die nahe bei 1 liegen, ist hinreichend genau

$$z = \frac{1+\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa} \qquad \frac{1}{z} = \frac{1-\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

$$\mathfrak{Sin}\,\xi_1 = \frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa} \qquad \mathfrak{Cos}\,\xi_1 = \frac{1}{\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

wo der Index 1 bedeuten soll, daß ξ_1 zum Kreis vom Radius r gehört.

Wir erhalten ferner

$$b - a = r\left(z - \frac{1}{z}\right) = 2\,r\,\mathfrak{Sin}\,\xi_1 = 2\,r\,\frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Die Koordinate ξ_2, die zum Kreis vom Radius R gehört, ist bestimmt durch die Beziehung

$$e^{\xi_2} = \frac{f + r z}{R}.$$

Setzt man $\xi_2 = \xi_1 - \delta$, wo δ eine kleine Zahl, so wird

$$\delta = \frac{(R-r)z - f}{Rz} = \frac{\Delta(z-\varkappa)}{r\left(1+\frac{\Delta}{r}\right)z} = \frac{\Delta}{r}\left(1-\frac{\varkappa}{z}\right)\left(1-\frac{\Delta}{r}\right).$$

Bei kleinem $\frac{\Delta}{r}$ ist genügend genau

$$\delta = \frac{\Delta}{r}\left(1-\frac{\varkappa}{z}\right) = \frac{\Delta}{r}\sqrt{1-\varkappa^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Schließlich handelt es sich noch um die Berechnung der Koordinate η aus den Polarkoordinaten $r\varphi$ eines beliebigen Punktes der Zapfenoberfläche. Man erhält aus der zweiten Gl (6) nach elementarer Rechnung

$$\eta = \operatorname{arctg}\frac{2\,r^2\,\mathfrak{Sin}\,\xi_1\sin\varphi}{2\,r^2(1+\mathfrak{Cos}\,\xi_1\cos\varphi)} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\varkappa^2}\sin\varphi}{\varkappa+\cos\varphi} = 2\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right] \quad . \quad (12).$$

Auflösung nach φ ergibt

$$\varphi = 2\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}}\operatorname{tg}\frac{\eta}{2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Für die numerische Rechnung braucht man noch folgende leicht einzusehende Relationen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cos}\,2\,\xi_1 &= \frac{2-\varkappa^2}{\varkappa^2} & \mathfrak{Sin}\,2\,\xi_1 &= \frac{2\sqrt{1-\varkappa^2}}{\varkappa^2} \\ (b-a)\,\delta &= 2\,\Delta\,\frac{1-\varkappa^2}{\varkappa} & \frac{\delta^{-3}}{b-a} &= \frac{1}{2\,r}\left(\frac{r}{\Delta}\right)^3\frac{\varkappa}{1-\varkappa^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Außer dem vorbehandelten Fall, der sich auf Gleitlager bezieht, kann auch noch der Fall Bedeutung erlangen, wo zwar der Unterschied der Radien $R - r$ nicht mehr klein ist, wo jedoch der kürzeste Abstand der Kreise klein gegenüber den Radien ist. Dabei können zwei Fälle eintreten:

a) Der Kreis vom Radius r liegt ganz innerhalb des Kreises vom Radius R.

Die Entwicklungen bis Gl. (6) bleiben unverändert.

Wir setzen
$$f = (1-\varepsilon)(R-r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$
wo ε eine kleine Zahl ist.

Aus Gl. (6) folgt dann unter Vernachlässigung aller Größen ε, ε^2 gegen $\sqrt{\varepsilon}$.

$$z = 1 + \sqrt{2\,\varepsilon\,\frac{R}{r}} = e^{\xi_1}, \qquad z_1 = 1 + \sqrt{2\,\varepsilon\,\frac{r}{R}} = e^{\xi_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\mathfrak{Sin}\,\xi_1 = \sqrt{2\,\varepsilon\,\frac{R}{r}}, \quad \mathfrak{Cos}\,\xi_1 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$\eta = \operatorname{arctg}\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi_1\sin\varphi}{1+\mathfrak{Cos}\,\xi_1\cos\varphi} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2\,\varepsilon\,\frac{R}{r}}\,\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2\,\varepsilon\,\frac{R}{r}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) \quad 18).$$

wo φ auf den Umfang des Kreises vom Radius r bezogen ist.

b) Die Kreise liegen so, daß ihr kürzester Abstand gleich $f - (R + r)$ wird.

Wir setzen
$$f = (1+\varepsilon)(R+r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

so daß für $\varepsilon = 0$ $f = R + r$ wird. Dann ist

$$z = 1 + \sqrt{2\varepsilon \frac{R}{r}}, \qquad z_1 = 1 - \sqrt{2\varepsilon \frac{r}{R}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20),$$

$$\eta = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2\varepsilon \frac{R}{r}} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Diese Betrachtungen finden Anwendung bei Untersuchung des Schmierfilms von Rollenlagern.

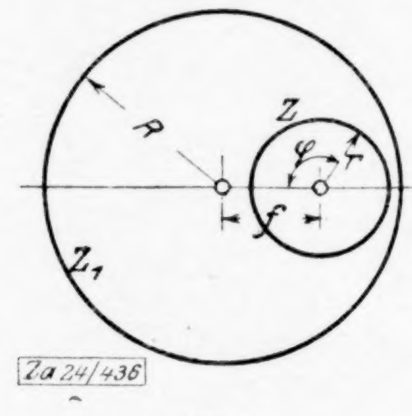


Abb. 5

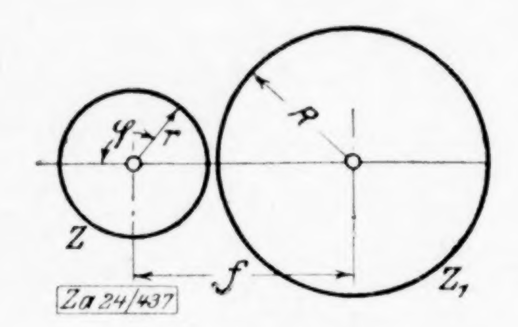


Abb. 6

10. Numerische Berechnung. Die gefundenen Resultate setzen uns jetzt in den Stand, ganz einfache Formeln für die zahlenmäßige Berechnung des Druckverlaufs, der Komponenten des Gesamtdruckes und der Reibungskräfte aufzustellen.

Nach Formel (14) in **9.** ist zunächst

$$Q_0 = U(b - a)\,\delta = 2\,\frac{1 - \varkappa^2}{\varkappa}\,U\,\Delta.$$

Wie schon bei Aufstellung der Randbedingungen (37) bemerkt wurde, ist Q von negativem Betrag. Wir setzen $Q = -\lambda\,U\,\Delta$, wo λ eine positive Zahl bedeutet. Es folgt dann aus (55) und den Relationen (13) bis (18) in **9.**

$$(1 - \varkappa^2)^{3/2} \frac{p\,r}{6\,\mu\,U}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2 = K' + \left[1 - \frac{2 + \varkappa^2}{1 - \varkappa^2}\lambda\right]\eta - \left[\varkappa - \frac{4\varkappa}{1 - \varkappa^2}\lambda\right]\sin\eta - {}^1/_2\,\frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa^2}\lambda\sin 2\eta \quad (71).$$

Für den Grenzfall, wo $\varkappa$ sich der Eins nähert, setzen wir

$$\varkappa = 1 - \varepsilon \text{ mit } \lim \varepsilon = 0, \qquad \sqrt{1 - \varkappa^2} = \sqrt{2\varepsilon}$$

und erhalten

$$2\sqrt{8\varepsilon^5}\,\frac{p\,r}{6\,\mu\,U}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2 = K - [3\lambda - 2\varepsilon]\,\eta + [4\lambda - 2\varepsilon]\sin\eta - \frac{\lambda}{2}\sin 2\eta \quad . \quad (71').$$

Soll nun p für $\eta = \eta_1$ und $\eta = \eta_2$ denselben Wert annehmen, so ergibt sich λ aus der Gleichsetzung der beiden Ausdrücke (71') zu

$$\lambda = 2\varepsilon\,\frac{\eta_1 - \eta_2 - (\sin\eta_1 - \sin\eta_2)}{3(\eta_1 - \eta_2) - 4(\sin\eta_1 - \sin\eta_2) + {}^1/_2(\sin 2\eta_1 - \sin 2\eta_2)} \quad . \quad . \quad . \quad (72).$$

Für die Druckresultanten erhält man aus (62):

$$(1 - \varkappa^2)^{3/2} \frac{P_0}{6\,\mu\,U}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2 = \left[\frac{1 - \varkappa^2}{\varkappa} - 2\,\frac{\lambda}{\varkappa}\right]\eta + 2\lambda\sin\eta\,\Bigg|_{\eta_2}^{\eta_1} \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

und bei kleinem ε

$$\sqrt{8\varepsilon^3}\,\frac{P_0}{6\,\mu\,U}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2 = [2\varepsilon - 2\lambda]\,\eta + 2\lambda\sin\eta\,\Bigg|_{\eta_2}^{\eta_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73')$$

und aus (64):

$$\frac{(1 - \varkappa^2)^2}{\varkappa}\,\frac{P}{6\,\mu\,U}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2 = \left[-\frac{1 - \varkappa^2}{\varkappa} + 2\,\frac{\lambda}{\varkappa}\right]\cos\eta - \frac{\lambda}{2}\cos 2\eta\,\Bigg|_{\eta_2}^{\eta_1} \quad . \quad . \quad (74),$$

bei kleinem ε:

$$4\varepsilon^2\,\frac{P}{6\,\mu\,U}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2 = [-2\varepsilon + 2\lambda]\cos\eta - \frac{\lambda}{2}\cos 2\eta\,\Bigg|_{\eta_2}^{\eta_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74').$$

Für die Reibungskraft endlich folgt aus (68)

$$(1 - \varkappa^2)^{3/2}\,\frac{\mathfrak{R}}{\mu\,U}\,\frac{\Delta}{r} = [-4(1 - \varkappa^2) + 6\lambda]\,\eta - 6\,\varkappa\lambda\sin\eta\,\Bigg|_{\eta_2}^{\eta_1} \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

und bei kleinem ε:

$$\sqrt{8\varepsilon^3}\,\frac{\mathfrak{R}}{\mu\,U}\,\frac{\Delta}{r} = [-8\varepsilon + 6\lambda]\,\eta - 6\lambda\sin\eta\,\Bigg|_{\eta_2}^{\eta_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75').$$

Ist allgemein der Druck p an den Stellen η_1 und η_2 der Zapfenoberfläche vorgeschrieben, so können die Konstanten K' und λ in (71) bestimmt werden und unsere Aufgabe ist vom hydrodynamischen Standpunkt aus vollständig gelöst. Mit dem wirklichen Vorgung ist die Lösung nur dann im Einklang, wenn p für jedes η im Intervall η_2 bis η_1 positive Werte annimmt, deren untere Grenze durch die Dampfspannung der Flüssigkeit festgelegt ist. Tritt dieser Fall nicht ein, so sind bezüglich der das Förderquantum Q bestimmenden Zahl λ besondere Betrachtungen anzustellen, die durch experimentelle Grundlagen gestützt werden müssen und demgemäß mit den obigen Herleitungen nicht das Mindeste zu tun haben. Wir kommen auf diesen Punkt später ausführlich zurück.

11. Der Energieverbrauch. Zur Beurteilung der Erwärmungsverhältnisse bezw. der Dissipation der Energie müssen wir zunächst auf die unverkürzten Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der quadratischen Glieder zurückgreifen. Diese lauten, wenn man mit L die lebendige Kraft $\frac{\varrho}{2}(u^2+v^2)$ bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned}\varrho\left[\frac{\partial u}{\partial t}-v\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]-\mu\,\Delta u&=-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial x}\\ \varrho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]-\mu\,\Delta v&=-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial L}{\partial y}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (76)$$

und wenn man die erste dieser Gll. mit u, die zweite mit v multipliziert, so ergibt die Addition:

$$\frac{\partial L}{\partial t}-\mu\left[u\,\Delta u+v\,\Delta v\right]=-u\,\frac{\partial(L+p)}{\partial x}-v\,\frac{\partial(L+p)}{\partial y} \quad . \; . \; . \; . \quad (77).$$

Integriert man beiderseits über ein festliegendes Flächenstück mit dem Flächenelement df, so ergibt sich, wegen $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$:

$$\int\frac{\partial L}{\partial t}\,df-\mu\int\left[u\,\Delta u+v\,\Delta v\right]df=-\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{(L+p)\,u\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{(L+p)\,v\right\}\right]df \quad (78).$$

Die Theoreme von Green und Gauß gestatten, das zweite Integral links und das Integral rechts in Randintegrale zu verwandeln. Wenn n die innere Normale und ds das Bogenelement des Randes bezeichnet, $w^2=u^2+v^2$ und w_n für die Normalkomponente geschrieben wird, so ist (78) gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial}{\partial t}\int L\,df+\mu\int w\,\frac{\partial w}{\partial n}\,ds+\mu\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]df=\int(L+p)\,w_n\,ds \quad (79).$$

Im stationären Zustand, mit dem wir es hier zu tun haben, ist der erste Ausdruck links gleich 0. Rechts steht in $\int L\,w_n\,ds$ die pro Zeiteinheit durch den Rand eintretende Energie, in $\int p\,w_n\,ds$ die auf die Flüssigkeitsmasse in der Zeiteinheit durch den äußeren Druck ausgeübte Arbeit, während $\mu\int w\,\frac{dw}{dn}\,ds$ die Arbeit der von außen her wirkenden Schubkraft bedeutet, vorausgesetzt, daß w tangential zum Rand gerichtet ist. Aus der durch (79) gegebenen Bilanz geht dann hervor, daß das stets positive Integral

$$W=\mu\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]df \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (80)$$

diejenige Energie darstellt, die im Innern des Flächenstückes pro Zeiteinheit in Wärme verwandelt wird.

Man könnte nun W gemäß (80) berechnen. Gemäß (79) hat man aber einfacher

$$W=\int p\,w_n\,ds-\mu\int w\,\frac{dw}{dn}\,ds \quad . \; . \; . \quad (81),$$

wenn man $\int L\,w_n\,ds$ vernachlässigt.

Abb. 7

Betrachtet man das Flächenstück $1-2$, (Abb. 7), unseres exzentrisches Kreisringes, so ist, da im Querschnitt p bis auf die Glieder von der Ordnung δ^2 (wie eine kleine Rechnung ergibt), konstant ist

$$\int p\,w_n\,ds=p_2\int w_n\,ds+p_1\int w_n\,ds=(p_2-p_1)\,Q.$$

Vernachlässigen wir in $\int w \frac{d w}{d n} d s$ die Anteile der Querschnitte und berücksichtigen nur den Anteil der Zapfenfläche, wo $w = U$ ist, so ergibt sich

$$\mu \int_2^1 w \frac{d w}{d n} d s = U \int q \, d s = U \, \Re_{12}.$$

Demnach ist die pro Zeiteinheit in dem betrachteten Element in Wärme verwandelte Energie

$$A = U \, \Re_{12} - Q \, (p_1 - p_2)_2, \text{ worin } \Re_{12} = \int_2^1 q \, d s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82),$$

die auf die Strecke 1—2 entfallende Reibungskraft bezeichnet.

12. Das Auftreten negativer Drucke. Wie schon in **10** angedeutet, ist es möglich, daß bei Vorschrift von p für η_1 und η_2, der Druck in seinem Verlauf innerhalb oder außerhalb des Intervalles η_2 bis η_1 negative Werte annimmt. Die Natur der meisten Flüssigkeiten läßt solche Druckwerte nur in ganz geringem Maße zu, so daß wir hier im Interesse der Einfachheit als untere Grenze $p = 0$ annehmen wollen. Was tritt nun ein, wenn unsere Formeln negative Werte für p ergeben?

Entsprechen η_2 und η_1 den Enden A_2 und A_1 der Flüssigkeitsschicht, wo freier Zufluß und Abfluß stattfindet, und nimmt p negative Werte an nur für Werte des Arguments η, welche außerhalb des Intervalles η_2 bis η_1 liegen, so hat dieser Umstand auf unser Problem keinen Einfluß. Der gemäß (71) und (72) bestimmte Wert von λ ergibt die Lösung entsprechend Abb. a.

Würde die Lösung negative Werte von p für Werte des Arguments η innerhalb des Intervalles η_2 bis η_1 etwa nach Abb. b ergeben, so müßte die Flüssigkeitsbewegung im Intervall η_3 bis η_1 eine andere sein, als die aus unseren Formeln hervorgehende. Infolge der Tendenz der Flüssigkeitsschicht, sich zusammenzuziehen, tritt entweder eine Ablösung der Schicht von dem äußeren feststehenden Zylinder ein, wie bei A_3, Abb. e; das Problem bleibt zweidimensional, es treten Molekularkräfte in die Grenzbedingung ein, die eine außerordentliche Komplikation in der rechnerischen Verfolgung verursachen. Andererseits kann sich die Flüssigkeitsschicht auch in Richtung der z-Achse zusammenziehen und dann wird das Problem ein dreidimensionales. Der Wert λ, wie er sich aus den Werten η_1 und η_2 ergibt, hat aber keine Bedeutung für das Problem, da mit Auflösung der Flüssigkeitsschicht im ganzen Intervall η_3 bis η_1 der Druck $p = 0$ wird.

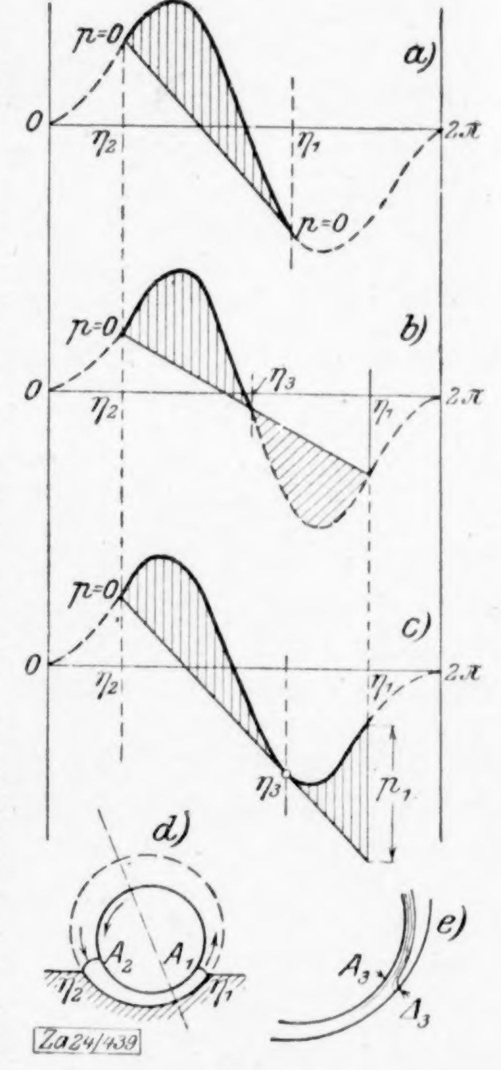


Abb. 8

Ueber den Wert λ, der in den Endformeln eine Hauptrolle spielt, muß daher in anderer Weise verfügt werden.

Nun hat Gümbel[1]) für den Punkt gemäß A_3, Abb. e, eine Grenzbedingung aufgestellt, die auf $p = 0 \; \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0$ hinauskommt. Auf diese Weise wird das Auftreten negativer p vermieden, Abb. C, es nimmt aber p für $\eta = \eta_1$ den positiven Wert p_1 an, während am Austritt $p = 0$ sein müßte. Da nunmehr für eine Auflösung der Schicht innerhalb des Intervalles η_2 bis η_1 kein Grund vorhanden ist, so sieht man leicht ein, daß der hiernach berechnete Wert von λ und die entsprechende Fördermenge $- Q = \lambda \, U \, \Delta$ zu klein ist. Dieser Wert von λ stellt eine untere Grenze dar, die nie erreicht werden kann. Damit ist aber sichergestellt, daß das Druckgefälle $- \partial p / \partial \eta$ an der Stelle η_3, wo p verschwindet, einen positiven Wert annehmen muß.

[1]) Gümbel, Monatsbl. d. Berliner Bezirksvereins deutsch. Ing., 1. Sept. 1921.

Wir bemerken noch folgendes: Das Druckgefälle, für das gemäß (71) die Gleichung

$$-(1-\varkappa^2)^{3/2}\frac{r}{6\mu U}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2\frac{\partial p}{\partial \eta} = -1 + \frac{2+\varkappa^2}{1-\varkappa^2}\lambda + \left[\varkappa - \frac{4\varkappa}{1-\varkappa^2}\lambda\right]\cos\eta + \frac{\varkappa^2}{1-\varkappa^2}\lambda\cos 2\eta \qquad (83)$$

bestellt, verschwindet an der Stelle η_3, wenn die Bedingung erfüllt wird

$$\lambda U \Delta = U\,{}^1/_2\,\Delta_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (84),$$

wo Δ_3 die Höhe des Querschnittes an der Stelle η_3 bedeutet.

Nun ist annähernd $\Delta_3 = \delta/M$, wenn in M für η der Wert η_3 eingesetzt wird, also nach (36)

$$\Delta_3 = \frac{(b-a)\,\delta}{2}\,\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\eta_3} = \Delta\,\frac{1-\varkappa^2}{1-\varkappa\cos\eta_3}.$$

Aus (84) folgt dann

$$\cos\eta_3 = \frac{1}{\varkappa}\left[1 - \frac{1-\varkappa^2}{2\lambda}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (85)$$

und dieser Wert von η_3 macht die rechte Seite von (83) zu Null für jeden beliebigen Wert von $\varkappa$ und λ.

Setzt man allgemeiner in (84) einen unbestimmten Faktor ν an Stelle von ${}^1/_2$, so folgt anstatt (85):

$$\cos\eta_3 = \frac{1}{\varkappa}\left[1 - \nu\,\frac{1-\varkappa^2}{\lambda}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (86)$$

und für das Druckgefälle an der Stelle η_3

$$-\frac{r}{6\mu U}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2\frac{\partial p}{\partial \eta} = \nu\,(2\nu-1)\,\frac{1}{\lambda\sqrt{1-\varkappa^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (87).$$

Da η_3 hierin nicht mehr vorkommt, so ergibt diese Beziehung für einen beliebigen Querschnitt die Zahl ν, wenn das Druckgefälle $\frac{\partial p}{\partial \eta}$ bekannt ist. Man erkennt in (87), daß ν eine positive Zahl und größer als ${}^1/_2$ sein muß. Für Werte von $\varkappa$, die in der Nachbarschaft von 1 liegen, ergibt sich eine weitere Beschränkung für den Wert ν. Da in diesem Falle in (72) η_1 einen von π, η_2 einen von Null nur wenig verschiedenen Wert annimmt, ergibt sich leicht, daß $\lambda < {}^2/_3\,\varepsilon$ oder $\frac{2\varepsilon}{\lambda} > 3$ und $\cos\eta_3 < \frac{1}{1-\varepsilon}\,[1-3\nu]$, also $\nu < {}^2/_3$, wenn ein reeller Wert η_3 existieren soll. Der Zahlwert von ν bleibt also auf das Intervall 0,500 bis 0,6666 . . . beschränkt und hängt vermutlich von dem physikalischen Verhalten der Flüssigkeit gegenüber dem Material der Begrenzung (Lagerschale, Zapfen) ab.

Vorbehaltlich experimenteller Prüfung bleibt daher nichts anderes übrig, als zunächst eine plausible Annahme für ν zu machen, wenn man die Verhältnisse zahlenmäßig verfolgen will. Eine solche Annahme wäre etwa $\nu = 0{,}600$.

Da nun gemäß (72), wenn η_2 klein und $\eta_1 = \pi + \eta_3$ bei kleinem η_3, in erster Annäherung

$$\lambda = {}^2/_3\,\varepsilon\,\frac{\pi + 2\eta_3}{\pi + {}^8/_3\,\eta_3}$$

gilt, andererseits nach (84) bei $\nu = 0{,}6$ anstatt 0,5

$$\lambda = \frac{1{,}2\,\varepsilon}{2 - \varepsilon - {}^1/_2\,\eta_3{}^2},$$

so hat man zur Bestimmung von η_3 die Beziehung

$$\varepsilon = \frac{0{,}6\,\pi}{\pi + 2\eta_3} - 0{,}4 - {}^1/_2\,\eta_3{}^2 \quad . \; . \; . \quad (88)$$

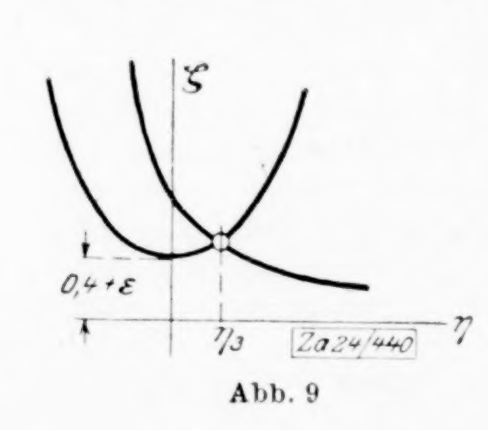


Abb. 9

Aus dieser Gleichung erhält man den Wert $\eta = \eta_3$ ganz unabhängig von η_2. Die Voraussetzung aber, daß η_3 und η_2 klein bleiben, muß erfüllt sein, andernfalls kann die Wurzel dieser Gleichung nur als erste Annäherung gelten.

Von der Lösung der Gl. (88) kann man sich leicht ein Bild machen, wenn man sie in der Form

$$0{,}4 + \varepsilon + {}^1/_2\,\eta^2 = \frac{0{,}6\,\pi}{\pi + 2\eta}$$

schreibt. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem $\eta\zeta$ ergibt sich dann die Lösung aus dem Schnitt der Parabel $\zeta = 0{,}4 + \varepsilon + {}^1/_2\,\eta^2$ mit der gleichseitigen Hyperbel $\zeta + \frac{0{,}6\,\pi}{\pi + 2\eta}$.

Bemerkung: Das Druckgefälle $\frac{dp}{ds}$ unterscheidet sich von dem Druckgefälle $\frac{\partial p}{\partial \eta}$ durch den Faktor M.

Bei kleinem η_3, wie es hier vorausgesetzt wird, ist für die Zwecke der vorhergehenden Betrachtung genau genug $\cos\eta = -1$ und $M = 1/\sqrt{1-\varkappa}$, daher nach (87):

$$\frac{-r^2}{6\,\mu\,U}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2\frac{dp}{ds} = \nu\,(2\,\nu - 1)\,\frac{1}{\lambda(1-\varkappa)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (89).$$

woraus $\frac{dp}{ds}$ in der Nachbarschaft des engsten Querschnittes bestimmt ist.

Die ganze vorliegende Betrachtung, insbesondere das Operieren mit einem angenommenen konstanten Zahlwert ν, die nötig war, um die Rechnungsergebnisse auf das Verhalten der Schmierschicht in einem Traglager anwenden zu können, ist als Notbehelf nur so lange zu benutzen, bis sie durch etwas besseres ersetzt wird.

13. Explicite Darstellung der Stromfunktion ψ. Bisher hatten wir nur die ersten und zweiten Ableitungen der Stromfunktion zur Ermittlung der Druck- und Reibungsverhältnisse benutzt. Die grundlegende Rolle, welche diese Funktion, sowohl bei dem hydrodynamischen Problem, wie bei dem der elastischen Platte spielt, rechtfertigt aber ihre explicite Darstellung, trotz der etwas umständlichen Schreibweise.

Die Bestimmung von ψ ist durchgeführt, sobald die Koeffizienten $A_0\,B_0\,C_0\,D_0\,A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ in der Darstellung (41) der Funktion F ermittelt sind. Löst man nun die Gl. (42) und (43) auf, was keinerlei prinzipielle Schwierigkeit bietet, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{F}(\xi,\eta) = {} & \frac{b-a}{N_0}\,U e^{\xi_1}\Big\{(\xi-\xi_1)\,[e^{2\xi_1}-e^{2\xi_2}]\,[e^{2\xi_2}-e^{2\xi}] \\
& \qquad + 2\,(\xi-\xi_2)\,(\xi_1-\xi_2)\,e^{2\xi_2}\,(e^{2\xi}-e^{2\xi_1})\Big\} \\
& + \frac{2\,Q\,e^{2\xi_2}}{N_0}\Big\{(\xi-\xi_2)\,[e^{2\xi}-e^{2\xi_1}]\,[e^{2\xi_1}-e^{2\xi_2}] \\
& \qquad - 2\,(\xi_1-\xi_2)\,(\xi-\xi_1)\,e^{2\xi_1}\,(e^{2\xi}-e^{2\xi_2})\Big\} \\
& + \frac{(e^{2\xi_2}+1)\,Q}{N_0}\Big\{-4\,(\xi_1-\xi_2)\,(\xi-\xi_1)\,e^{2\xi_1+2\xi_2} - 2\,[(\xi_1-\xi_2)\,e^{2\xi_1+2\xi_2} \\
& \qquad + (\xi-\xi_1)\,e^{2\xi+2\xi_1} - (\xi-\xi_2)\,e^{2\xi+2\xi_2}] + (e^{2\xi_1}-e^{2\xi_2})\,(e^{2\xi}-e^{2\xi_1})\Big\} \\
& - 4\,\frac{e^{2\xi_1+2\xi_2+\xi}}{N_1}\cdot Q\Big\{e^{2\xi_1-2\xi_2}\,(1+2\xi-2\xi_1) + e^{-2\xi_1+2\xi_2}\,(1-2\xi+2\xi_1) \\
& \qquad - 2 + e^{2\xi-2\xi_1} + e^{-2\xi+2\xi_1} - e^{2\xi-2\xi_2} - e^{-2\xi+2\xi_2}\Big\}\cos\eta
\end{aligned}\right\} \quad (90).$$

Die Funktion ψ, die nach (39) und (36) durch

$$\psi = \frac{1}{e^{2\xi} - 2\,e^{\xi}\cos\eta + 1}\,(\mathfrak{F}(\xi_1\,\eta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (91)$$

dargestellt wird, genügt der Differentialgleichung (10) und erfüllt streng die Randbedingungen (37) und (38). Auf Grund der Ergebnisse (90) und (91) können die Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse bei der Strömung zwischen beliebigen exzentrischen Zylindern dargestellt werden, ohne die Beschränkung, die wir oben mit der Annahme $\xi_1 - \xi_2 = \delta$, wo δ klein, gemacht haben.

Bei exzentrisch gelochter, kreisförmiger Platte ergibt (91) unmittelbar die Durchbiegung, wenn Q als relative Parallelverschiebung der Berandungen und U als Neigung der Normalen der deformierten Mittelfläche am inneren Rand gegen die Normale der undeformierten Mittelebene gedeutet wird. Am äußeren Rand ist dabei die Platte so eingespannt gedacht, daß auch nach der Deformation die Normalen die ursprüngliche Lage behalten. Auch der Fall einer Platte, bei der die Normalen am äußeren Rand sich infolge der Deformation um den vorgegebenen Betrag U' neigen, kann unter Benutzung obiger Resultate leicht verfolgt werden.

Betrachtet man im allgemeinen Fall die Druckverhältnisse auf Grund von Gl. (90) und (91), so sieht man, daß für $\eta =$ konst. der Druck sich mit ξ verändert. Eine eingehende Rechnung zeigt, daß in dem Falle eines kleinen $\delta = \xi_1 - \xi_2$ die Aenderung, welche δ entspricht, von der Größenordnung δ^2 wird, so daß mit einer für technische Anwendungen genügenden Genauigkeit der Druck in den Querschnitten der Flüssigkeitsschicht als konstant angesehen werden kann. Aus diesem Grunde kann das Rechnungsergebnis (50), das ursprünglich für den vollen exzentrischen Kreisring abgeleitet war, unbedenklich auf Teile des Ringes angewendet werden, und man kann sich an dem Beispiel der Platte vor Augen führen, daß die Deformation eines Ringteiles unter den vorgeschriebenen Randbedingungen annähernd dieselbe bleibt, wenn der Ring an den Stellen $\eta = \eta_2$ und $\eta = \eta_1$ durchschnitten ist, wie beim vollen Ring, vorausgesetzt, daß die Länge $\eta_1 - \eta_2$ des abgetrennten Ringstückes groß ist gegen die Breite $\xi_1 - \xi_2$.

Ist $\xi_1 - \xi_2$ nicht mehr klein, so muß der Rechnungsgang modifiziert werden, wenn an den Rändern $\eta = \eta_2$ $\eta = \eta_1$ der Druck vorgeschrieben ist. Dieser Fall sei hier nur kurz gestreift, hauptsächlich um den Unterschied gegenüber dem vollen Kreisring hervorzuheben. Wie schon früher angedeutet, sind dann in den Partikularlösungen von (30) die Größen m nicht mehr ganze Zahlen, sondern wir müssen über die m in anderer Weise vefügen.

Durch Zusammenfassung von sin- und cos-Gliedern in (33) erhalten die Partikularlösungen die Form

$$\psi = \frac{e^{m\xi} \cos m(\eta - \eta_2)}{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1} \qquad \frac{e^{-m\xi} \cos m(\eta - \eta_2)}{e^{2\xi} - 2e^{\xi}\cos\eta + 1} \text{ usw.}$$

Will man nun z. B. erreichen, daß der Druck p für $\eta = \eta_2$ und $\eta = \eta_1$ verschwindet, so wird man zweckmäßigerweise von der Lösung (91) ausgehen, wo

$$\mathfrak{F}(\xi, \eta) = A_0 + B_0\,\xi + C\,e_{2\xi} + D_0\,\xi\,e^{2\xi}$$

$$+ \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[A_m e^{\frac{m\pi}{l}\xi} + B_m e^{-\frac{m\pi}{l}\xi} + C_m e^{\left(\frac{m\pi}{l}+2\right)\xi} + D_m e^{\left(-\frac{m\pi}{l}+2\right)\xi} \right] \cos\frac{m\pi(\eta - \eta_2)}{l} \quad . \quad (92).$$

Vermöge der Beziehungen (46) ersieht man, daß in dem aus (91) hervorgehenden Ausdruck für p alle Glieder mit dem Koeffizienten $A_m\ B_m\ C_m\ D_m$ sowohl für $\eta = \eta_1$ als auch $\eta = \eta_2$ verschwinden, während von den ersten 4 Gliedern von $\mathfrak{F}$ herrührend noch die Terme

$$B_0\,e^{-\xi}\sin\eta_1 \qquad D_0\,e^{\xi}\sin\eta_1$$

$$\text{bezw. } B_0\,e^{-\xi}\sin\eta_2 \qquad D_0\,e^{\xi}\sin\eta_2$$

übrigbleiben. Es läßt sich daher die Bedingung $p = 0$ bezw. $p =$ konst. mit der Lösung (91) im allgemeinen nicht erfüllen, jedoch annähernd um so besser, je kleiner $\sin\eta_1$ und $\sin\eta_2$ ausfallen. Dies ist aber bei vielen Problemen, insbesondere dem der Lagerschmierung der Fall, so daß dann doch mit der Lösung (91) ein praktisch befriedigendes Resultat zu erreichen ist. Die den Randbedingungen entspringenden Gl. (40) bleiben unverändert, zur Bestimmung der A_m müssen aber die rechten Seiten (am Rand $\xi = \xi_2$) in Fourier-Reihen entwickelt werden von der Form

$$\left.\begin{aligned} K_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} K_m \cos\frac{m\pi(\eta - \eta_2)}{l} &= Q\left[e^{2\xi_2} - 2e^{\xi_2}\cos\eta + 1\right] \\ K_0' + \sum_{m=1}^{m=\infty} K_m \cos\frac{m\pi(\eta - \eta_2)}{l} &= 2Q\left[e^{2\xi_2} - e^{\xi_2}\cos\eta\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (93).$$

Zur Bestimmung von $A_m\ B_m\ C_m\ D_m$ für irgend ein m hat man dann, wenn $\frac{m\pi}{l} = n$ gesetzt wird, das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} A_m e^{n\xi_1} + B_m e^{-n\xi_1} + C_m e^{(n+2)\xi_1} + D_m e^{(-n+2)\xi_1} &= 0 \\ A_m e^{n\xi_2} + B_m e^{-n\xi_2} + C_m e^{(n+2)\xi_2} + D_m e^{(-n+2)\xi_2} &= K_m \\ A_m n e^{n\xi_1} - B_m n e^{-n\xi_1} + C_m (n+2) e^{(n+2)\xi_1} + D_m (-n+2) e^{(-n+2)\xi_1} &= 0 \\ A_m n e^{n\xi_2} - B_m n e^{-n\xi_2} + C_m (n+2) e^{(n+2)\xi_2} + D_m (-n+2) e^{(-n+2)\xi_2} &= K_m \end{aligned}\right\} \quad (94),$$

dessen Determinante den Wert hat:

$$N = 8e^{2\xi}\left[\mathfrak{Cof}\,2n\delta - n^2\,\mathfrak{Cof}\,\delta + n^2 - 1\right] \text{ mit } \left.\begin{aligned} \zeta &= \xi_1 + \xi_2 \\ \delta &= \xi_1 - \xi_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (95).$$

Man ersieht hieraus, daß das Bildungsgesetz der Fourier-Reihe (93) kompliziert ist. Natürlich hat die Ueberlegung nur dann eine Bedeutung, wenn die Reihe (93) gleichmäßig konvergiert und zweimalige Differentiation erlaubt, denn nur dann kann von einer Erfüllung der Differentialgleichung (10) die Rede sein. Die Konvergenz wird vermutlich von der Wahl der Grenzen ξ_1 und ξ_2 abhängen; auf die weitere Untersuchung sei hier verzichtet, um so mehr als es zweifelhaft ist, ob man die oben angenommenen Grenzbedingungen, denen p genügen soll, realisieren kann.

Die von uns betrachteten Lösungen sind regulär in der ganzen Ebene ξ, η (bezw. ζ Ebene) mit Ausnahme des Punktes $\xi = 0$, $\eta = 0$ $(\zeta = 0)$. Sie gelten daher nur für ein Gebiet, das weder im Innern noch auf dem Rande den Punkt $\zeta = 0$ enthält, der gemäß (5) dem Punkt $z = \infty$ entspricht. Insbesondere sind die Entwicklungen nicht anwendbar auf den unbegrenzten Außenraum von zwei Kreisen, sofern man verlangt, daß die Geschwindigkeit im Unendlichen verschwindet. Dieser Fall entspräche dem Verhalten einer unbegrenzten zähen Flüssigkeit, in der zwei Kreiszylinder sich in Rotation befinden. Hier muß man, um bei der Stromfunktion die Singularität bei $\zeta = 0$ zu vermeiden, an Stelle von (26) ausgehen von

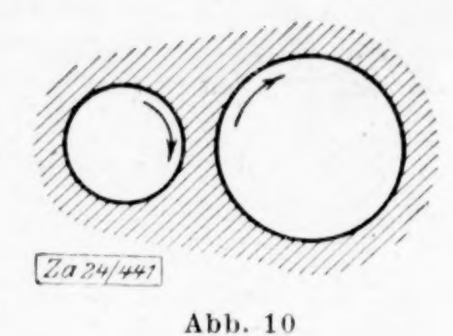


Abb. 10

$$P = \Re e\, e^{m\zeta}(e^{\zeta} - 1), \qquad S = \Im m\, e^{m\zeta}(e^{\zeta} - 1).$$

Die Koeffizientenbestimmung bei den Reihenentwicklungen wird aber noch komplizierter, da in den Gleichungssystemen verschiedene Indices verknüpft sind, so daß ein System von Differenzgleichungen zu lösen wäre.

14. Schlußbetrachtung. Es bleibt noch übrig, unsere Ergebnisse, die wir auf Grund einer strengen Lösung des Gleichungssystems (1) gewonnen haben, den Ergebnissen der Reynoldschen Theorie, die zu der Formel

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 6\,\mu\, U \frac{h - h_1}{h^3}$$

gelangt, gegenüber zu stellen.

Da bei Herleitung dieser Formel p längs der Normalen zur Zapfenoberfläche konstant angenommen wird und da außerdem an der Stelle $\varphi = \varphi_1$, $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$ ist, so kann p keine harmonische Funktion des Ortes im exzentrischen Kreisring sein, wie es Gl. (4) streng verlangt.

Diese prinzipielle Diskrepanz und der Rechnungsgang zur Herleitung der Reynoldschen Formel, der in überaus einfacher Weise die Resultate für den Parallelstreifen auf den Kreisring überträgt, dadurch, daß kurzerhand das für ersteren konstante h für letzteren als veränderlich erklärt wird (denn mehr steckt, unbeachtet aller Umschreibungen, in der ganzen Herleitung nicht), gab Veranlassung zu der strengen Untersuchung.

Eine Reproduktion der Reynoldschen Theorie ist in der Zeitschrift »Engineering« vom 20. August 1915 veröffentlicht. Man findet daselbst Formel (46), die in unserer Terminologie lautet

$$p = C + \frac{6\,\mu\, U r \varkappa}{\Delta^2}\left\{\frac{(1 + \varkappa\cos\varphi_1)\sin\varphi}{2\,(1 - \varkappa^2)\,(1 + \varkappa\cos\varphi)^2} + \frac{(1 + 2\,\varkappa^2 + 3\,\varkappa\cos\varphi_1)\sin\varphi}{2\,(1 - \varkappa^2)^2\,(1 + \varkappa\cos\varphi)} - \frac{(2 + \varkappa^2)\cos\varphi_1 + 3\,\varkappa}{(1 - \varkappa^2)^2\sqrt{1 - \varkappa^2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right\}$$

wo φ_1 aus der Bedingung $\frac{d\,p}{d\,\varphi} = 0$ zu bestimmen ist.

Da aber dann auch $\frac{d\,p}{d\,\eta} = 0$ sein muß, so ergibt sich leicht

$$\lambda = {}^1/_2\,\frac{1 - \varkappa^2}{1 - \varkappa\cos\eta_1}$$

und damit der Zusammenhang zwischen den Konstanten φ_1 und λ

$$\lambda = {}^1/_2\,(1 + \varkappa\cos\varphi_1) \quad \text{weil} \quad \cos\eta_1 = \frac{\varkappa + \cos\varphi_1}{1 + \varkappa\cos\varphi_1}.$$

Mit Rücksicht auf die Relationen:

$$1 + \varkappa \cos \varphi = \frac{1 - \varkappa^2}{1 - \varkappa \cos \eta}, \qquad \sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - \varkappa^2} \sin \eta}{1 - \varkappa \cos \eta},$$

findet man leicht, daß die eben angeschriebene Formel vollständig identisch ist mit unserer Gl. (71).

Das Ergebnis ist einigermaßen überraschend und zeigt, daß der oben erwähnte, nicht unbedenkliche Kunstgriff, der sein Analogon in der Theorie der Elastizität des stabförmigen Körpers hat, wenigstens bei kleinen Differenzen in den Radien der Begrenzungskreise, zu Ergebnissen führt, die vom praktischen Standpunkt aus nicht zu beanstanden sind (bei großen Differenzen in den Radien ist der obige Vergleich hinfällig). Dies ist um so erfreulicher, als die strenge Behandlung des dreidimensionalen Problems fast unüberwindliche rechnerische Schwierigkeiten bietet. 321

Das Prinzip der Gleitkurven, ein neues Darstellungsmittel.

Von **H. SCHWERDT** in Berlin.

1. Einleitung. Ueberlagerung von Leitertafeln. Die Herleitung skalennomographischer Tafeln erfolgt zumeist in der Weise, daß eine vorgelegte Funktion in eine gewisse Normalform umgewandelt wird, für die ein zugehöriger Typ von Leitertafeln bekannt ist. Derartige Typen bestehen zunächst nur für Funktionen von drei Veränderlichen. In allgemeineren Fällen muß die gegebene Funktion durch Einführung von Hilfsvariablen in darstellbare Teilfunktionen dreier Veränderlichen zerlegt werden; die zugehörigen Teiltafeln sind dann unter Verwendung von Zapfenlinien so zu überlagern, daß die Hilfsgrößen zahlenmäßig nicht in Erscheinung treten. Dieses bekannte Verfahren der Zapfenlinie, das in letzter Zeit durch Hak[1]) und besonders in der Kretschmerschen Konstruktion[2]) eine schöne Auswertung gefunden hat, stößt aber bisweilen auf Schwierigkeiten; seine Anwendbarkeit ist nämlich an die Bedingung geknüpft, daß der Hilfsgröße (z) in allen Teiltafeln, in die sie eingeht, auch dieselbe Funktionsskala (Leiter) zugehört, und dieser Bedingung läßt sich nicht immer genügen.

Es sei beispielsweise eine Funktion

$$\alpha = \beta \cdot (\gamma + \delta) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1)$$

gegeben, in der $\alpha, \beta, ..$ selbst Funktionen[3]) bedeuten können. Dann läßt sich wohl eine Zerlegung $z = \gamma + \delta$ . . . . (2), $\alpha = \beta \cdot z$ . . . . (3) durchführen. Hier kann ohne weiteres für (2) eine Leitertafel mit parallelen Trägern angegeben werden, in der z als regelmäßige Teilung (reg z) erscheint. Es gibt zwar auch Leitertafeln für (3), denen die Teilung reg z zugrunde liegt; da sie sich jedoch vielfach den vorgeschriebenen Bereichen nicht hinreichend anschmiegen, erweist sich unter Umständen auch für (3) eine Tafel mit parallelen Trägern als notwendig, in der die Hilfsvariable dann aber als $\log z$ auftritt. In einem derartigen Fall kann eine Zapfenlinie nicht verwendet werden; man muß vielmehr einer Teiltafel (2) den Zahlenwert z entnehmen und weiterhin denselben Wert z auf einer anders geteilten Leiter in (3) suchen. (Beispiele dieser Art sind in den Anmerkungen belegt.) Durch die notwendigen Interpolationen und den Wechsel der Leitern gestaltet sich auf diesem Wege die Benutzung einer Tafel aber unhandlich. Man zieht daher vor, wenn γ und δ selbst und in den einfachen Zahlenwerten bekannt sind, den Wert $z = \gamma + \delta$ durch Nebenrechnung, also überhaupt ohne graphische Tafel zu ermitteln[4]). Aehnlich verfährt man in allen Fällen, in denen der Wertevorrat einiger Veränderlichen sich auf wenige, glatte Werte beschränkt, und erreicht dadurch oft erhebliche Vereinfachungen des graphischen Bildes[5]). In diesem Zusammenhang wäre auch der sog.

---

[1]) Hak, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1921, H. 2, S. 154 ff.

[2]) Kretschmer, Werft, Reederei und Hafen, Bd. 4, 1921, H. 2, S. 31 bis 35.

[3]) Die Form (1) stellt nur ein Beispiel dar. Für diesen Typ läßt sich leicht eine Leitertafel überhaupt ohne Zapfenlinie angeben. Vergl. z. B. Schwerdt u. Loebe, Meteorolog. Zeitschr. 1921, S. 139 bis 142.

[4]) Schwerdt, Belastbarkeit von Flachmaterial, ETZ Bd. 43, 1922, S. 779.

[5]) W. Loebe, Feinmechanik Bd. 1, 1922, Nr. 10. S. 151.

Sprung von z auf $z+1$ zu erwähnen [1] [2]. Im allgemeinen bleibt aber, besonders wenn γ und δ Funktionen sind, der Uebergang von einer Leiter $f_1(z)$ zu einer anderen Leiter $f_2(z)$ doch notwendig. Hak [2] hat zur Erleichterung dieses Ueberganges Richtungslinien (von anderen Leitlinien genannt) vorgeschlagen. Wenn bei geschickter Anordnung das Gesamtbild der Tafel hierdurch nicht an Uebersichtlichkeit leidet, so gewährt dieses Hilfsmittel gewiß einige Erleichterung.

2. Definition der Gleitkurve und Bewegungsvorschrift. In gemeinsamen Arbeiten mit Herrn v. Pirani wurde Verfasser schon im Frühjahr 1919 auf ein Verfahren geführt, den Uebergang von einer Leiter $f_1(z)$ zu einer anderen $f_2(z)$ graphisch zu bewirken, und es hat sich bei weiterer Untersuchung herausgestellt, daß auf diesem Wege ein neues Darstellungsmittel von umfassender Allgemeingültigkeit gewonnen wird.

Die Abb. 1 zeigt Ausschnitte aus den Leitern $A = \operatorname{reg} z$ und $B = \log z$, wobei die Zeicheneinheiten zunächst belanglos sind. Man denke eine Gerade (Ableselineal) derart bewegt, daß sie auf beiden Leitern jeweils die gleichen Argumentwerte z bestimmt. In der Zeichnung sind zwei Einzellagen für $z = 3$ und $z = 7$ festgehalten. Dann wird die Schar sämtlicher erzeugten Einzellagen von einer Kurve G umhüllt, die bewegte Gerade gleitet (als Tangente) an der Kurve G, die wir als Gleitkurve bezeichnen. Bekannte Ueberlegungen aus der Bewegungslehre zeigen, daß auch in allgemeineren Fällen stets eine Gleitkurve bestimmt ist, wenn nur den (auch krummlinigen) Teilungen A und B stetige Funktionen zugrunde liegen.

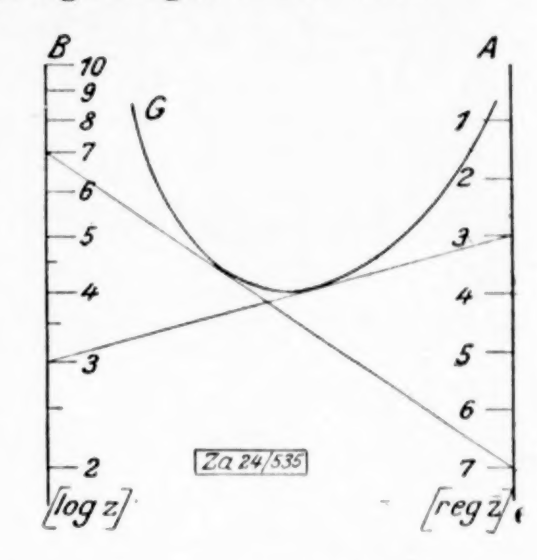
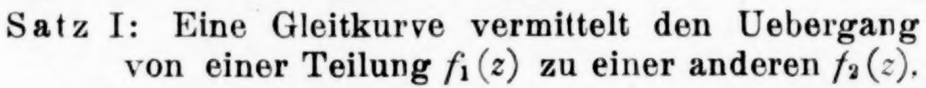


Abb. 1



Satz I: Eine Gleitkurve vermittelt den Uebergang von einer Teilung $f_1(z)$ zu einer anderen $f_2(z)$.

Wir haben die Teilungen A und B als vorhanden (ausgeführt) vorausgesetzt und aus ihnen die Gleitkurve abgeleitet. Es sei nun auf irgendeine Weise die Kurve G gegeben. Dann können wir davon absehen, die Teilungen A und B auszuführen, die Gleitkurve ermittelt auf dem (teilungslosen) Träger B den Punkt, der dem auf Träger A gewählten Punkte zugehört. Damit ist aber erreicht, daß eine Zapfenlinie A in eine ebenfalls teilungslose Zapfenlinie B anderer Struktur ohne Benutzung von Zahlenwerten rein graphisch übergeführt wird.

In Abb. 2 ist in dieser Weise eine Zapfenlinie A, der die Funktion z^2 zugrunde liegt, zu einer anderen Zapfenlinie B mit der unterdrückten Teilung $\sin z$ durch die beiden Zweige der Gleitkurve G in Beziehung gesetzt. Um die Zeicheneinheiten und die Lageverhältnisse hervortreten zu lassen, sind die Argumentwerte 0 und $\pi/2$ auf beiden Linien angegeben. Wählen wir irgendeinen Punkt auf A, der einen bestimmten, wenn auch unbekannten Zahlenwert z^2 darstellt, und drehen das Lineal um diesen Punkt, bis es die Gleitkurve berührt, so bestimmt es auf B einen Punkt, der einen zugehörigen, aber unbekannten Zahlenwert $\sin z$ bedeutet. Etwa in der Gegend $\pi/3$ würde im Beispiel der Abb. 2 die Lage des

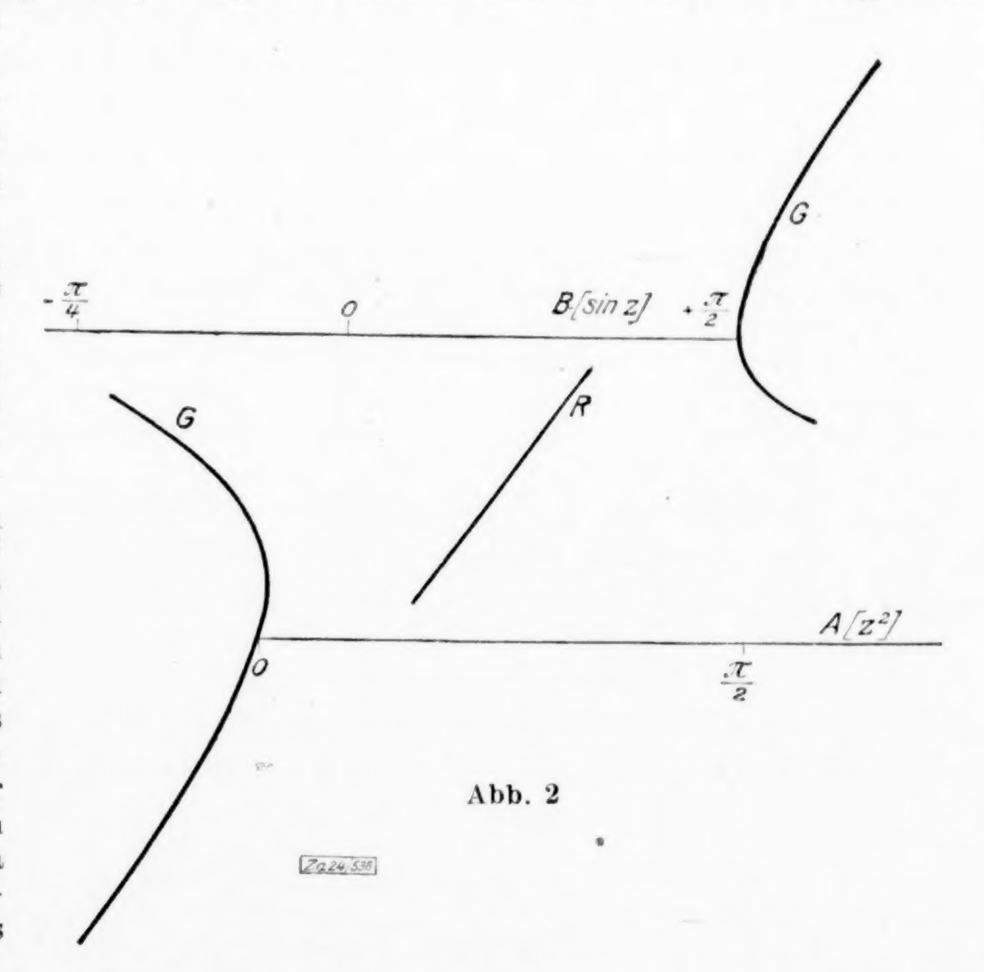


Abb. 2

[1] Ulf. Meyer, ETZ Bd. 42, 1921, Nr. 43, S. 1225. Mitt. d. telegraphentechnischen Versuchsamtes Bd. IX.

[2] Hak, l c. ferner M. Reishaus, Präzision, Bd. 1, 1922, S. 386.

Lineals praktisch nicht hinreichend definiert sein. Man führt in derartigen Fällen eine Richtungslinie (R) ein [1]).

3. Berechnung der Gleitkurve. Bei der Herstellung einer Leitertafel sind die Funktionen, die den Zapfenlinien A und B zugrunde liegen, zumeist in geschlossener Form bekannt. Es wäre also denkbar, im Entwurf der Tafel die Funktionsskalen $A = f_1(z)$ und $B = f_2(z)$ wirklich auszuführen und die Gleitkurve auf Grund der angegebenen Bewegungsvorschrift als Hüllkurve zu zeichnen.

Abb. 3

Es erscheint natürlich wünschenswert, eine Gleitkurve auch punktweise zu gewinnen. Wir legen einer Leitertafel ein rechtwinkliges, cartesisches Bezugssystem zugrunde. Zur Vereinfachung des Rechnungsganges wird man die Lage dieses Systems jeweils den besonderen Verhältnissen anpassen. So würde in Abb. 1 der 0-Punkt etwa in den Punkt 0 der Leiter A zu legen sein, die positive (also nach unten gehende) Richtung dieser Leiter als positive Y-Achse, die Gerade $0(A) \to 10(B)$ als positive X-Achse gewählt werden können (Abb. 3). Die Leitern werden dann durch folgende Angaben bestimmt:

Leiter A: Träger: $x_1 = 0$, Teilung: $y_1 = z$, Leiter B: Träger: $x_2 = 8$, Teilung: $y_2 = 10 \cdot (1 - \log z)$.

Die Gleichung der beweglichen Geraden lautet:

$$(y - y_1) \cdot (x_2 - x_1) = (y_2 - y_1) \cdot (x - x_1) \quad \ldots \ldots \ldots (4),$$

unter Berücksichtigung der besonderen Werte demnach:

$$F(x, y; z) = \frac{10 \cdot (1 - \log z) - z}{8} \cdot x - y + z = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (4a)$$

Man erhält die Hüllkurve der durch $F(x, y; z) = 0$ dargestellten Geradenschar in bekannter Weise durch Bildung der Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \ldots \ldots (5), \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{x}{8}\left(\frac{10 \cdot \log e}{z} + 1\right) + 1 = 0 \quad (5a).$$

Hieraus ergibt sich unter Einführung des Zahlenwertes von $\log e$:

$$x = \frac{8}{1 + \frac{4{,}34}{z}} \quad \ldots (6a), \qquad y = \frac{14{,}34 - 10 \cdot \log z}{1 + \frac{4{,}34}{z}} \quad \ldots \ldots (7a).$$

Die Ausdrücke (6a) und (7a) geben die Gleitkurve in der Parameterdarstellung. Dies ist als besonderer Vorteil unseres Verfahrens anzusehen. Wenn nämlich die Elimination von z kein einfaches Funktionsbild $G(x, y) = 0$ für die Gleitkurve liefert, gewährt die geschlossene Form der Kurvengleichung weder für die Diskussion noch für die numerische Berechnung irgendwelche Vorteile. Handelt es sich um leicht diskutierbare Kurven, bei denen der Verlauf aus gewissen geometrischen Eigenschaften erschlossen werden kann, wie z. B bei den Kegelschnitten, so ist der Uebergang von der Parameterdarstellung zur geschlossenen Kurvengleichung ohne Schwierigkeiten ausführbar.

Im allgemeinen Falle gestaltet sich der Berechnungsgang wie folgt:

Die Träger A und B seien gegebenenfalls auch als krummlinig vorauszusetzen; jede Leiter wird dann durch zwei Funktionen bestimmt, entweder durch die Gleichung des Trägers und eine Teilungsfunktion oder durch zwei Teilungsfunktionen: $x = f(z)$, $y = g(z)$. Die Angaben des soeben erledigten Beispieles lassen beide Auffassungen zu.

Leiter A: $x_1 = f_1(z)$, $y_1 = g_1(z)$, Leiter B: $x_2 = f_2(z)$, $y_2 = g_2(z)$.

Aus (4) ergibt sich, wenn die Argumentbezeichnung z fortgelassen wird:

$$F(x, y; z) = x \cdot (g_1 - g_2) - y \cdot (f_1 - f_2) + f_1 g_2 - g_1 f_2 = 0 \quad \ldots (4),$$

und (5) geht über in

$$\frac{\partial F}{\partial z} = x(g_1' - g_2') - y(f_1' - f_2') + f_1' g_2 - f_2' g_1 - g_1' f_2 + g_2' f_1 = 0 \quad . \quad (5).$$

[1]) Mit Rücksicht auf die Periode der Sinusfunktion und darauf, daß x^2 eine gerade Funktion ist, muß der Uebergang von A nach B und umgekehrt mehrdeutig erfolgen. Die Gleitkurve bestimmt unter Umständen mehrere Lagen des Ableselineals.

Diese beiden Gleichungen liefern dann, am einfachsten mit Hilfe von Determinanten, die allgemeine Lösung:

$$x = x(z) \quad . \; . \; . \; . \; (6), \qquad y = y(z) \quad . \; . \; . \; (7).$$

Schon diese elementare Auffassung der Gleitkurve vermag den Leitertafeln einen größeren Anwendungsbereich erschließen:

Satz II: Es können Teiltafeln mit Zapfenlinien verschiedenen Aufbaues stets so überlagert werden, daß der graphische Rechnungsgang einheitlich bleibt.

4. Erweiterung des Begriffs der Gleitkurve. Gleitkurventafeln. In Abb. 1 wird die Gleitkurve auf Grund der Vorschrift entwickelt, die Ablesung des Argumentes auf A sei mit der Ablesung des Argumentes auf B identisch. Es ist aber nicht erforderlich, daß die Ablesungen übereinstimmen, wir können vielmehr verlangen, daß auf B irgendeine vorgelegte Funktion von z abgelesen wird, ohne Rücksicht auf den zeichnerischen Aufbau der Leiter B. Diese Erkenntnis ist nun in praktischer Hinsicht außerordentlich fruchtbar: es läßt sich also auf beliebigen Leitern $A(z)$ und $B(w)$ jede Funktion $w = F(z)$ mit Hilfe einer Gleitkurve darstellen. Es enthalte F einen Parameter γ, dann ist die Gestalt und Lage der Gleitkurve von w und z unabhängig. Aendert sich dagegen γ, so ändert sich auch die Gleitkurve, und wir erhalten in der Ebene der Leitern A und B eine Schar von Gleitkurven G_1, G_2, . . ., wenn γ die Werte γ_1, γ_2 . . . durchläuft.

Damit gewinnen wir den

Satz III: Jede Funktion zwischen drei Veränderlichen kann in einer Leitertafel mit beliebig unterteilten und gelegenen Leitern und einer Gleitkurvenschar dargestellt werden (Gleitkurventafel).

Es bietet sich naturgemäß sofort die Frage dar, in welchem Maße dieser sehr weitgehende Satz III von praktischer Bedeutung ist. Für die Darstellung einer Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ schlechthin erübrigt sich die Erörterung dieser Frage; es bestehen genug brauchbare Tafeltypen für Funktionen dieser Art, sodaß kein Anlaß vorliegen dürfte, eine Gleitkurventafel mit diesen Darstellungen in Wettbewerb treten zu lassen. Wir haben aber in der Praxis vielfach die Aufgabe zu lösen, ein (simultanes) System von Funktionen zu behandeln. Für die Funktion

$$H(\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, ..) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

sei eine brauchbare Leitertafel entworfen, und zugleich werde die Lösung

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

verlangt. Es ist dann möglich, daß sich bei dem für $H = 0$ notwendigen Aufbau der Leitern die Funktion $F = 0$ nicht darstellen läßt, oder daß sich für F überhaupt keine Leitertafel im engeren Sinne ergibt.

Im vorliegenden Falle müßte also für (9) eine besondere Tafel (Leiter- oder Netztafel) entworfen werden. Dieser Umstand ist für die Benutzung eines derartig zusammengesetzten Nomogramms insofern außerordentlich lästig, als dieselben Werte α und β auf verschiedenen Leitern verschiedener Struktur gewählt werden müssen und gegebenenfalls die graphische Rechenvorschrift in den einzelnen Teilen der Darstellung verschieden ist.

Diese Nachteile werden in einer Gleitkurventafel völlig vermieden. Wir können daher die praktische Bedeutung des Satzes III dahingehend kennzeichnen:

Satz IV: Da sich für jede Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ eine Gleitkurventafel mit beliebig geteilten Leitern $A(\alpha)$ und $B(\beta)$ entwerfen läßt, kann im Rahmen einer Leitertafel $H(\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, ..) = 0$ mit Hilfe einer Gleitkurvenschar die Funktion F durch dieselbe Lage des Ableselineals dargestellt werden, die für H gilt.

5. Durchführung eines Beispieles. Die Erwärmung einer elektrischen Maschine steigt unter den üblichen Voraussetzungen über Energiezufuhr und Abkühlung nach der Funktion

$$T = T_\infty (1 - e^{-bt}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

an, in der t die Zeit und T Temperaturen bedeuten (Abb. 4). Für die Praxis ist zunächst die Ermittlung von T_∞ ausschlaggebend; t ist bei der Verschiedenheit der möglichen Versuchsanordnungen in außerordentlich weiten Grenzen variabel. Daher wurde eine Tafel auf Grund der Festsetzung entworfen, daß nach beliebiger Zeit t_1 die Temperatur T_1, nach der doppelten Zeit $t_2 = 2 \cdot t_1$ die Temperatur T_2 gemessen werde. Die Zeit t tritt dann in der Leitertafel unmittelbar nicht mehr in Erscheinung, und es wird in üblicher

Weise aus T_1 und T_2 die stationäre Temperatur T_∞ gefunden, wie das in Abb. 4 eingezeichnete Beispiel erkennen läßt. Die Herleitung des besonderen Tafeltyps würde den Rahmen dieser Arbeit übersteigen. Es handelt sich jetzt darum, auch die Zeitkonstante des Vorganges zu berücksichtigen, und zwar soll dies mit derselben Stellung des Ableselineals erfolgen. Die Zeit t_∞, nach der sich der Endzustand **merklich** einstellt, wird in γ-Einheiten der für T_2 gewählten Zeit t_2 gemessen und in bekannter Weise gleich der 7-fachen Zeitkonstante angenommen. Es tritt also der Faktor γ als Begleitwert auf

$$t_\infty = \frac{7}{b} = \gamma \cdot t_2 \quad (11).$$

Setzen wir

$$z^2 = 1 - e^{-\frac{7}{\gamma}} \quad (12),$$

so folgt aus (10):

$$T_2 = T_\infty \cdot z^2 \quad (13).$$

In der Leitertafel sind die Teilungen T_∞ und T_2 durch folgende Angaben bestimmt, aus denen auch zugleich die Lage des Bezugssystems hervorgeht (Zeicheneinheit 1 dm):

$$\text{Leiter } T_\infty\text{:} \quad x_1 = -1, \quad y_1 = 10/T_\infty,$$

$$\text{Leiter } T_2\text{:} \quad x_2 = +1, \quad y_2 = 0{,}1 \cdot T_2.$$

Unter Berücksichtigung von (13) lautet die Gl. (4) der Ablesegeraden nach einigen Umformungen:

$$F = 0{,}1 \cdot T_2^{\,2}(x+1) - 2\,y\,T_2 - 10 \cdot z^2(x-1) = 0 \quad [\text{s. } (12)].$$

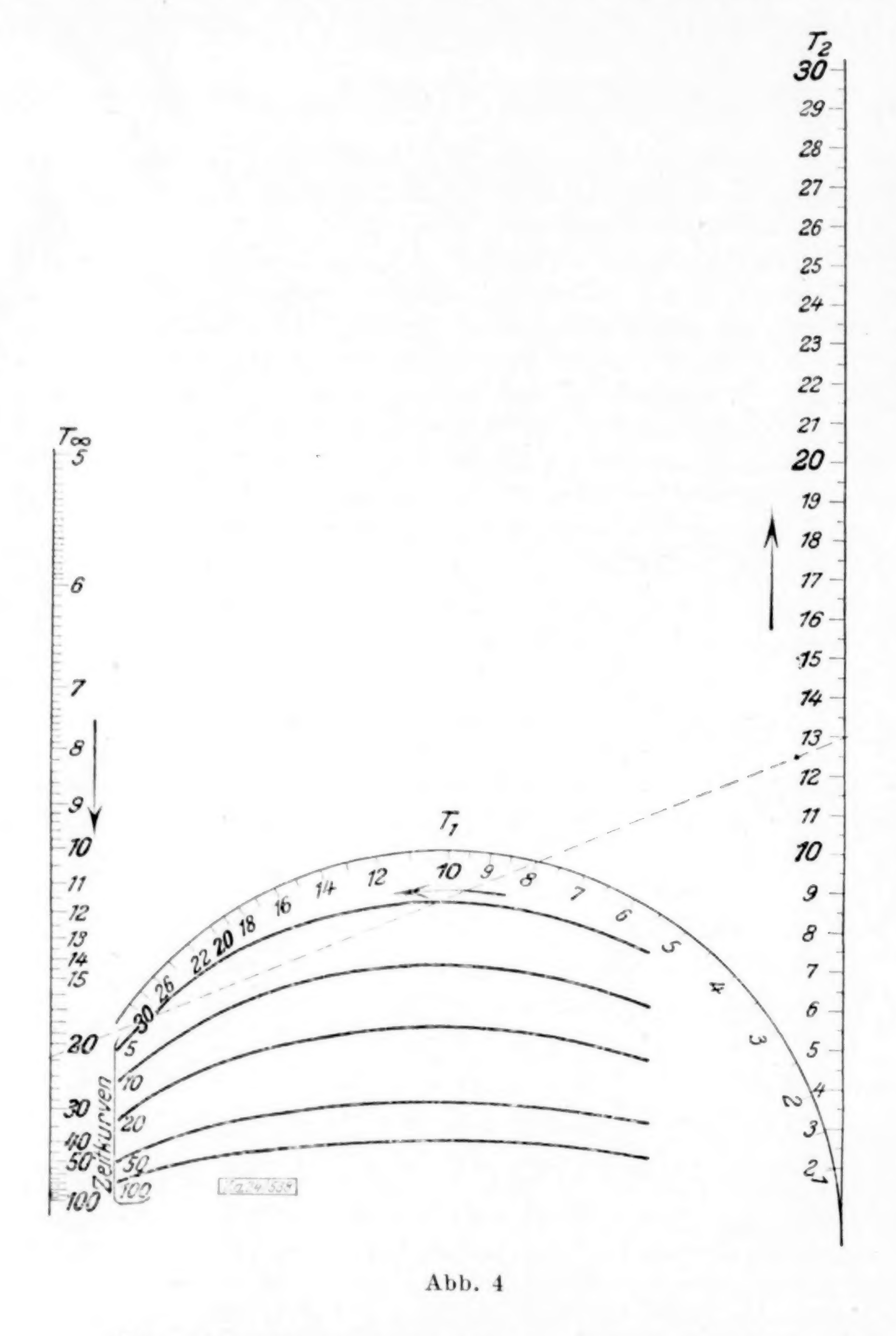


Abb. 4

Für einen bestimmten Wert γ ist z^2 konstant, daher ist für eine Gleitkurve die die Größe T_2 als Parameter der Tangentenschar anzusehen

$$\frac{\partial F}{\partial T_2} = 0{,}2 \cdot T_2\,(x+1) - 2\,y = 0.$$

Die Elimination von T_2 ergibt endlich die Gleitkurve in geschlossener Form:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{z^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14).$$

Eine Gleitkurve für den festen Wert z ist demnach eine zwischen den Leitern T_∞ und T_2 gelegene Ellipse mit den Halbachsen 1 und z. Bei Veränderung von z ergibt sich eine konzentrische Ellipsenschar mit gemeinsamer Hauptachse. Die Bezifferung wird naturgemäß unmittelbar nach γ vorgenommen.

Mit Hilfe der Werte z lassen sich die Ellipsen nach bekannten Konstruktionen entwerfen.

Gleitet für eine Ablesung $T_1 \to T_2 \to T_\infty$ das Lineal an der Kurve γ, so tritt der stationäre Zustand merklich nach der Zeit $t_\infty = \gamma \cdot t_2$ ein.

Für die zeichnerische Herstellung von Kurvenscharen sei auf das Verfahren von Pirani[1]) verwiesen.

6. Dualität und ihre Bedeutung für die Nomographie. Die bisherigen Darlegungen haben gezeigt, welcher außerordentlich hohe Grad von Allgemeinheit den überlagerten Leiter- und Gleitkurventafeln zukommt, und das in Abb. 4 wiedergegebene Beispiel läßt erkennen, wie schmiegsam das Prinzip der Gleitkurven ist. Das Prinzip selbst hängt eng mit den Grundlagen der Nomographie überhaupt zusammen, sodaß man seine Bedeutung sowohl in praktischer als auch theoretischer Hinsicht nur im Zusammenhang mit diesen Fragen erörtern kann. Dazu ist es aber vorteilhaft, einen Begründungsweg einzuschlagen, der von den üblichen Verfahren abweicht.

Die für jede graphische Tafel gültige Rechenvorschrift bezeichnet man als Schlüssel. In einer Netztafel der Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ bestimmen eine Linie α und eine Linie β einen Punkt, der seinerseits die Linie γ festlegt. In einer Leitertafel für dieselbe Funktion entspricht diesem Schlüssel die Vorschrift, daß ein Punkt α und ein Punkt β eine Gerade bestimmen, die ihrerseits den Punkt γ ermittelt. Diese Zuordnung der Schlüssel weist auf das Prinzip der Dualität. Wollen wir die Theorie der Leitertafeln auf Grundlage der Dualität entwickeln, so müssen wir von Netztafeln mit Geradenscharen ausgehen. Diese Darstellungen sind (zum Zwecke der vorliegenden Begründungsweise der Skalennomographie) in einer früheren Arbeit eingehend untersucht worden[2]), sodaß im folgenden auf die Ergebnisse zurückgegriffen werden kann.

Die Aufgabe erfährt die Formulierung: Es sei eine Netztafel gegeben; wie wird sie in eine Leitertafel verwandelt und wie verändert sich dabei der Schlüssel?

Wir werden die Lösung zunächst für geradlinige Netztafeln entwickeln, und es wird sich im weiteren Verlaufe zeigen, daß das Gleitkurvenprinzip die Umwandlung allgemeiner Netztafeln mit beliebigen Schlüsseln in Leitertafeln vollzieht.

7. Konstruktion von Leitertafeln mit Hilfe von Pol und Polare. Der einfachste Weg, die duale Zuordnung durchzuführen, besteht in der Konstruktion von Pol und Polare in bezug auf einen Kegelschnitt.

Als erstes Beispiel werde die Konstruktion in bezug auf einen Kreis gegeben (Abb. 5). Die Geraden der Chenevierschen Strahlentafel mit gestreckten Zeicheneinheiten, die das Produkt $\gamma = \alpha \cdot \beta$ darstellt, werden in ihre Pole in bezug auf den Kreis um O_2 abgebildet. Die Geraden $\alpha =$ konst sind parallel, gehen also durch einen (uneigentlichen) Punkt; daher liegen auf Grund bekannter Sätze im dualen Bilde die Punkte $\alpha =$ konst auf einer Geraden. Dasselbe gilt für die Geraden und Bildpunkte $\gamma =$ konst. Die Bildpunkte $\beta =$ konst. haben als Träger die Polare von O_1. Das Ergebnis ist demnach eine Fluchtlinientafel mit geradlinigen Trägern. Der Schlüssel ist in der Netztafel für $4 = 0.8 \cdot 5$ durch Zeichnung hervorgehoben. Im dualen Bilde entspricht dem Ablesepunkt P die Ablesegerade l. Die Abb. 5 ist rein konstruktiv entworfen worden, die sinngemäße Anwendung der Abbildungssätze gewährt für die einzelnen Schritte der Zeichnung erhebliche Vereinfachungen. Jede beliebige Netztafel mit Geradenscharen läßt sich auf diesem Wege in eine Leitertafel abbilden, wobei der funktionale Zusammenhang völlig unbekannt sein kann.

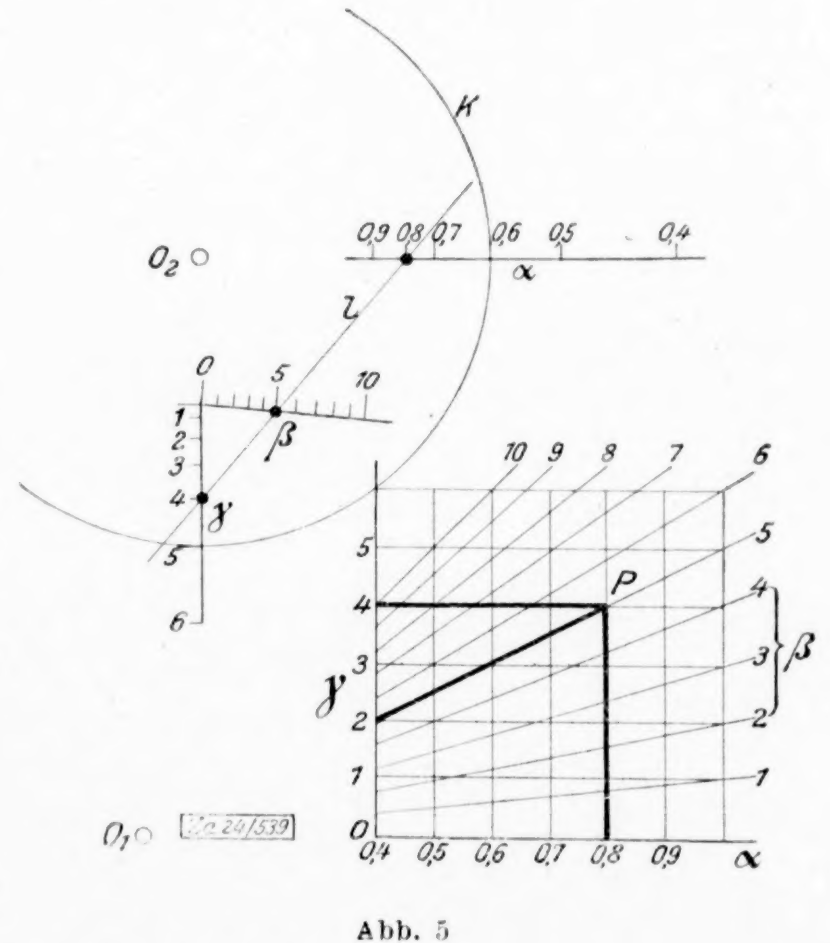


Abb. 5

Wir sind daher auch in der Lage, empirisch gewonnene Netztafeln mit beliebig verzerrten Koordinatenlinien (z. B. Logarithmenpapier, Dispersionsnetz u dergl.) in Leitertafeln überzuführen.

Besonders einfach gestaltet sich die Konstruktion, wenn die duale Abbildung durch eine Parabel bewirkt wird, da in diesem Falle die bekannten Eigenschaften der Subtangente und

[1]) Pirani, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1923, S. 235.
[2]) Schwerdt, Physik. Zeitschr. Bd. 18, 1917, S. 45 bis 53.

Scheiteltangente benutzt werden können. Die Parabel ist ferner typisch für die Ueberführung eines rechtwinkligen Netzes in zwei parallele Leitern, sie liefert uns also Fluchtlinientafeln nach Art der bekannten Grundform.

Das Netz, von dem wir in Abb. 6 ausgehen, ist das bekannte doppelt-logarithmische Papier $10 \cdot \log \alpha$, $10 \cdot \log \beta$, in welches die spezielle Lalannesche Multiplikationstafel $\gamma = \alpha \cdot \beta$ eingezeichnet ist. Die Lage dieser Tafel in bezug auf die Abbildungsparabel

$$y^2 = 10 \cdot x, \quad (p = 5) \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

wird so gewählt, daß der 0-Punkt (also $\alpha = 1$, $\beta = 1$) auf der Achse der Parabel 15-Einheiten nach links verschoben und das Netz um 45° gedreht ist. Daher sind die Geradenscharen wie folgt bestimmt:

$$Y_1 = X_1 - (10 \cdot \sqrt{2} \cdot \log \alpha - 15) \quad \ldots \ldots \quad (16),$$

$$Y_2 = -X_2 + (10 \cdot \sqrt{2} \cdot \log \beta - 15) \quad \ldots \ldots \quad (17),$$

$$X_3 = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \log \gamma - 15 \quad \ldots \ldots \quad (18).$$

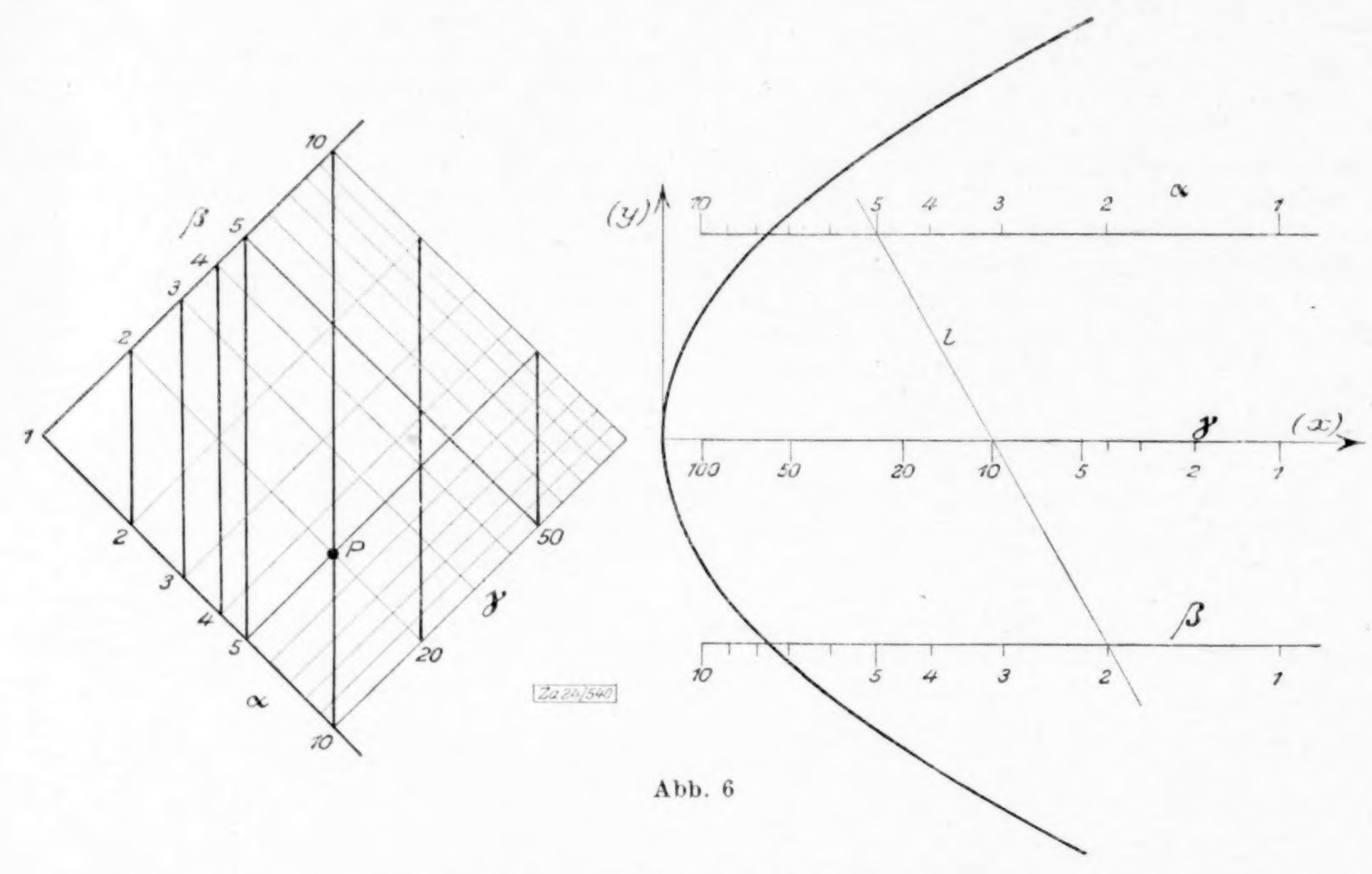


Abb. 6

Die Beziehung zwischen Pol und Polare folgt aus (15):

$$Y \cdot y = 5 \cdot (X + x) \quad \ldots \ldots \quad (19).$$

Sehen wir X und Y als laufende Koordinaten an, so bedeuten x und y die Koordinaten des Poles zur Geraden (19). Wir haben also

$$Y = \frac{5}{y} \cdot X + \frac{5 \cdot x}{y} \quad \ldots \ldots \quad (19a)$$

der Reihe nach mit (16) bis (18) in Uebereinstimmung zu bringen, um die den Geradenscharen α bis γ zugehörigen Punktreihen (Leitern) zu erhalten:

α) $\dfrac{5}{y_1} = +1$, $\dfrac{5\,x_1}{y_1} = 15 - 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \log \alpha$ — Träger: $y_1 = +5$; Teilung: $x_1 = 15 - 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \log \alpha$

β) $\dfrac{5}{y_2} = -1$, $\dfrac{5\,x_2}{y_2} = 10 \sqrt{2} \log \beta - 15$ — Träger: $y_2 = -5$; Teilung: $x_2 = 15 - 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \log \beta$

γ) $X = Y \cdot \dfrac{y_3}{5} - x_3$, $\dfrac{y_3}{5} = 0$, $-x_3 = 5 \sqrt{2} \log \gamma - 15$ — Träger: $y_3 = 0$; Teilung: $x_3 = 15 - 5 \sqrt{2} \log \gamma$

Sehen wir von der konstanten Verschiebung um 15 ab, so erkennen wir, daß wir die Grundform der einfachen Leitertafel mit parallelen abstandsgleichen Skalen gewonnen haben.

8. Allgemeine Abbildung von Netztafeln in Leitertafeln. Die Zuordnung zwischen Netz- und Leitertafel auf Grund der Sätze von Pol und Polare hat den Vorzug besonderer Anschaulichkeit. Will man aber in der Praxis zu Leitertafeln mit handlichen Abmessungen und Lageverhältnissen gelangen, so ist es häufig schwer, den geeigneten Kegelschnitt in günstiger Lage zu wählen. Führt man den allgemeinen Rechnungsgang in bezug auf einen Kegelschnitt durch, so gehen in die Abbildungsgleichungen die Konstanten des Kegelschnittes ein, während es den praktischen Bedürfnissen entspricht, die Konstanten der gewünschten Leitertafel von vornherein zu überschauen. Es ist daher ein allgemeineres Rechenverfahren am Platze, das die genannten Vorteile besitzt und zudem in seinen Ergebnissen symmetrisch erscheint.

Wir denken die Netztafel in einer Ebene E, in der das Bezugssystem (X, Y) wie oben gegeben sei. Die Leitertafel liege in einer Ebene e mit dem Koordinatensystem (x, y). In der Ebene E wird die Gerade L

$$X \cdot U + Y \cdot V + 1 = 0$$

durch ihre Linienkoordinaten U und V bestimmt. Die entsprechenden Bezeichnungen sollen in der Ebene e gelten. Dann wird die Abbildung der Punkte P und Geraden L der Ebene E in die Geraden l und Punkte p der Ebene e durch die folgenden Gleichungen bewirkt:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{a_{11} X + a_{12} Y + a_{13}}{a_{31} X + a_{32} Y + a_{33}} \\ v &= \frac{a_{21} X + a_{22} Y + a_{23}}{a_{31} X + a_{32} Y + a_{33}} \end{aligned}\right\} \quad (20); \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{A_{11} U + A_{12} V + A_{13}}{A_{31} U + A_{32} V + A_{33}} \\ y &= \frac{A_{21} U + A_{22} V + A_{23}}{A_{31} U + A_{32} V + A_{33}} \end{aligned}\right\} \quad (21).$$

Hierin sind die Koeffizienten A_{ik} die den Elementen a_{ik} complementären Unterdeterminanten von

$$|a| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Wir gebrauchen ferner folgende Bezeichnung:

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23).$$

Der Uebergang von der Größen A rückwärts zu a kann mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma a_{ik} \cdot A_{lm} &= |a|, \text{ wenn } i = l,\ k = m, \\ &= 0, \quad « \quad i = l,\ k \neq m \end{aligned}$$

erfolgen, wobei wir den Satz von Cauchy $|A| = |a|^2$ berücksichtigen. Da die Größen A und a durcheinander umkehrbar bestimmt sind, wird eine Abbildung durch die Angabe einer der Determinanten völlig definiert. Es hat sich als vorteilhaft erwiesen, die Determinante $|A|$ zu wählen. Der zur Verfügung stehende Raum gestattet nicht, die Theorie i. e. zu entwickeln. Es können daher nur die wesentlichen Ergebnisse angedeutet werden, soweit sie für die Gleitkurventafeln von Bedeutung sind. Die Theorie wird an anderer Stelle ausgeführt[1]).

Wir haben zunächst die Abbildung eines rechtwinkligen, cartesischen Netzes auf zwei Leitern vorzunehmen, wobei wir das Netz selbst als Funktionsnetz voraussetzen: die X-Achse trage die Teilung $f_1(\alpha_1)$, die Y-Achse die Teilung $f_2(\alpha_2)$. In der Bildebene e möge die α_1-Leiter mit der x-Achse zusammenfallen. Es gelten dann die Abbildungsgleichungen:

$$\alpha_1\text{: Träger: } u_1 = 0,\ v_1 = \infty, \qquad \text{Teilung: } x_1 = \frac{A_{13} f_1(\alpha_1) - A_{11}}{A_{33} f_1(\alpha_1) - A_{31}} \quad (24),$$

$$\alpha_2\text{: } « \left\{\begin{aligned} u_2 &= \frac{A_{22} A_{33} - A_{23} A_{32}}{A_{12} A_{23} - A_{22} A_{23}}, \\ v_2 &= \frac{A_{32} A_{13} - A_{12} A_{33}}{A_{12} A_{23} - A_{22} A_{13}} \end{aligned}\right. \qquad « \left\{\begin{aligned} x_2 &= \frac{A_{13} f_2(\alpha_2) - A_{12}}{A_{33} f_2(\alpha_2) - A_{32}} \\ y_2 &= \frac{A_{23} f_2(\alpha_2) - A_{22}}{A_{33} f_2(\alpha_2) - A_{32}} \end{aligned}\right\} \quad (25).$$

Im Anschluß an diese allgemeinen Gleichungen können nun Spezialisierungen vorgenommen werden, und zwar sowohl hinsichtlich der Lage der beiden Träger, als

[1]) Schwerdt, Lehrbuch der Nomographie, Berlin 1924, Julius Springer, § 45 bis 47.

auch mit Rücksicht auf die Bildgerade des 0-Punktes in E, die sog. Nullgerade u_0, v_0 in e. Auf diesem Wege ergeben sich gewisse Typen von Leitertafeln. So ist beispielsweise für die Abbildung auf parallele Träger die Determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ 0 & \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & 0 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

typisch, in der die fettgedruckten Größen wesentlich von Null verschieden sind, während A_{11} und A_{12} (bei geeigneter Wahl von u_0 und v_0) verschwinden dürfen.

Wenn nun eine Netztafel gegeben ist, so bilden wir zunächst die Koordinatenlinien $X =$ konst und $Y =$ konst mit Hilfe von (24) und (25) ab. Die besonderen Annahmen über die Lage der Träger sowie die im einzelnen Falle vorliegenden Bereiche führen zu einer zahlenmäßigen Bestimmung der Größen A (und damit auch a). Es ergibt sich also ein Schema nach Art der Determinante (26) mit bekannten Zahlenwerten. Dann ist es aber möglich, zu jedem Punkt $P = (X, Y)$ und zu jeder Geraden $L = (U, V)$ auf Grund der Gleichungen (20) und (21) die Bilder zu finden.

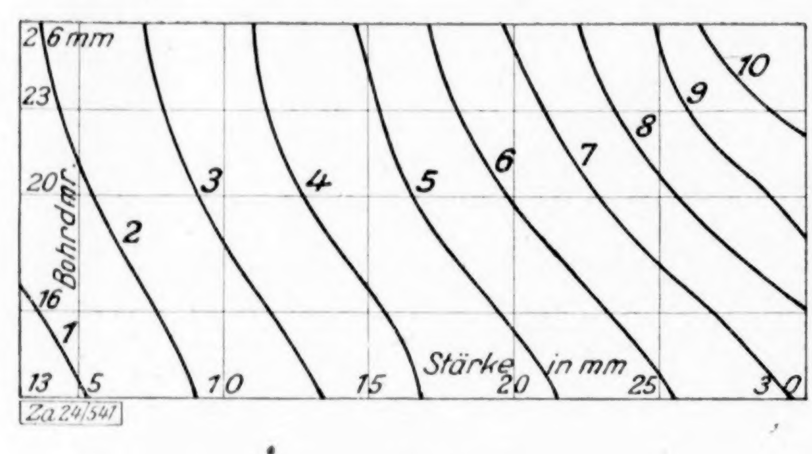


Abb. 7

Beispiel: In Abb. 7 ist eine von Herrn Eisner[1]) angegebene empirische Netztafel über gleiche Stundenanfälle beim Bohren dargestellt. Durch die Verzerrungen, die in Zahlentafel I vermerkt sind, lassen sich die Kurven 1 bis 10 in Geraden strecken, deren Koordinaten in Zahlentafel II zusammengestellt sind.

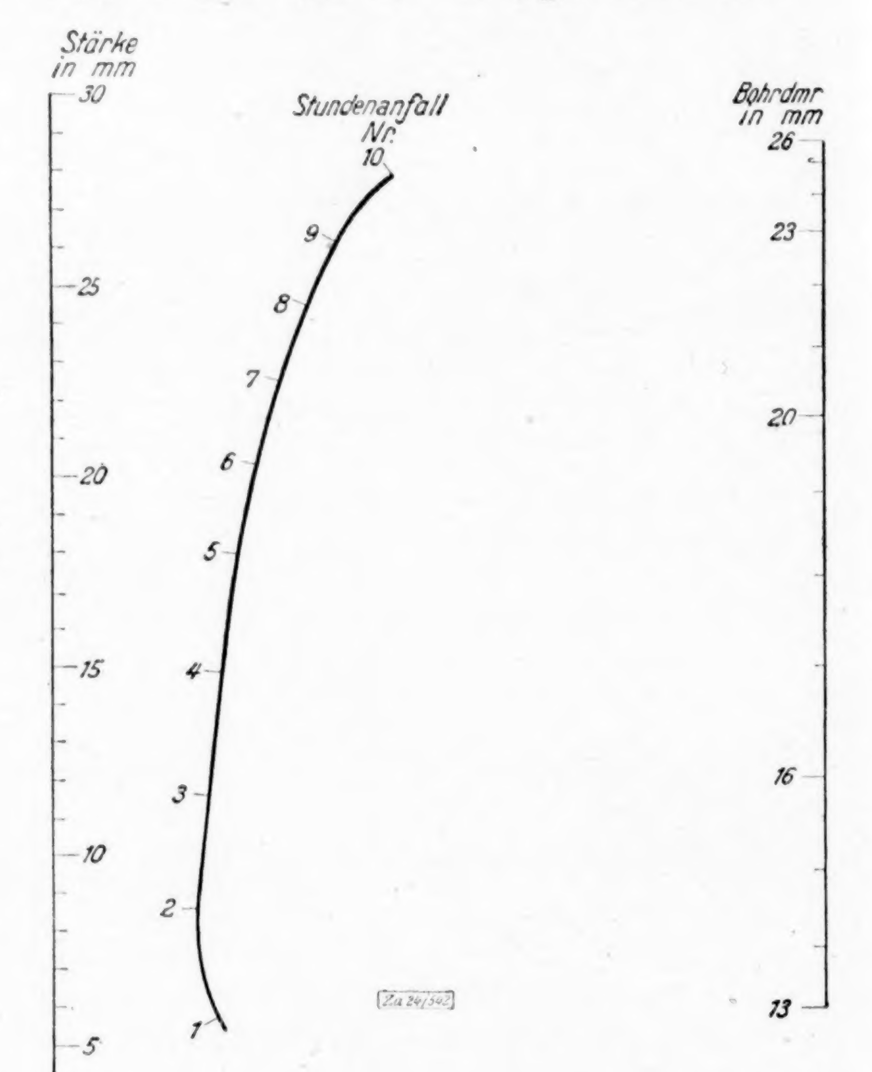


Abb. 8

Zahlentafel I.

Teilung der X-Achse[2])			
Bohrdurchmesser in mm	Abszisse f_1 (α_1) cm	Bohrdurchmesser in mm	Abszisse f_1 (α_1) cm
26	0,6	19	5,2
25	0,9	18	6,3
		17	7,5
24	1,3	16	9,0
23	1,8	15	10,2
22	2,5		
21	3,3	14	11,2
20	4,2	13	12,0

Zahlentafel II.

Kurve	U	V
1	−0,675	+1 250
2	+0,128	−0,278
3	075	143
4	050	093
5	044	070
6	043	059
7	044	052
8	045	046
9	046	041
10	050	047

[1]) Eisner, Maschinenbau Bd. 1, 1921, S. 17.
[2]) Die Teilung der Blechstärke bleibt regulär.

Um eine brauchbare Leitertafel zu gewinnen, in der die Längen der Teilungsbereiche und ihre Anordnung günstig sind, wird die Determinante (26) in der speziellen Form benutzt:

$$|A| = \begin{vmatrix} -30 & 0 & -2 \\ 0 & 40 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Es ergibt sich dann die in Abb. 8 entworfene Tafel, deren Konstruktionsdaten die folgenden sind:

Bohrdurchmesser . . . $x_1 = 30 - 2 \cdot f_1(\alpha_1)$, $y_1 = 0$,

Blechstärke . . . . . $x_2 = f_2(\alpha_2)$, $y_2 = 20$,

Stundenanfälle . . . . $x_3 = \dfrac{2 + 30 \cdot U}{U - 2 \cdot V}$, $y_3 = \dfrac{-40 \cdot V}{U - 2 \cdot V}$.

Es läßt sich leicht überschauen, wie sich die Umwandlung einer allgemeinen Netztafel mit Kurven in eine Gleitkurventafel gestaltet. Eine in der Ebene E gelegene Kurve $Y = \varphi(X)$ sehen wir als Hüllkurve ihrer Tangenten an, deren Koordinaten lauten:

$$U = \frac{\varphi'(X_1)}{Y_1 - X_1\,\varphi'(X_1)}, \qquad V = \frac{-1}{Y_1 - X_1\,\varphi'(X_1)}.$$

Hierin ist X_1 als Parameter der Geradenschar anzusehen. Wenn mit Hilfe von (24) und (25) die Abbildung des Koordinatennetzes bewirkt ist, kann auf Grund von (20) und (21) die duale Punktkurve ermittelt werden. Wesentlich ist dabei, daß (24) und (25) stets so angesetzt werden können, daß die Lage der Gleitkurve günstig wird.

Die zuletzt angeführten Ergebnisse lassen nun die Bedeutung des Schlüssels klar hervortreten. In zahlreichen Netztafeln wird die Ablesung derart vorgenommen, daß man von ermittelten Zwischenpunkten längs gerader oder krummer »Rechenlinien« zu anderen Stellen des Blattes übergeht. Einer Geradenschar, welche diese graphische Rechenoperation vermittelt, entspricht in der dualen Leitertafel eine reine Zapfenlinie. Handelt es sich um krumme Rechenlinien, so erhalten wir in der Leitertafel die zugehörigen Gleitkurven. Damit ist die Aufgabe erledigt, eine allgemeine Netztafel in ein Skalentafel zu verwandeln: jede Netztafel läßt sich in eine Gleitkurventafel abbilden.

9. Zusammenfassung. Bei der Darstellung von Funktionen dreier Veränderlicher in Skalentafeln blieb man bisher auf eine Anzahl einzelner Typen beschränkt. Mit Hilfe des Gleitkurvenprinzips lassen sich Netztafeln und Leitertafeln unter gemeinsamen Gesichtspunkten zusammenfassen. Im einzelnen gelangen wir zu folgenden Ergebnissen:

1. Leitertafeln mit Zapfenlinien verschiedener Struktur können mit Hilfe einer Gleitkurve überlagert werden.
2. In einer Leitertafel können zahlreiche Begleitwerte durch dieselbe Stellung des Ableselineals ermittelt werden, welche die Hauptfunktion löst.
3. Jede Netztafel mit Kurven und Rechenlinien kann in eine Gleitkurventafel verwandelt werden. Dies ist unter anderem für empirische Schaubilder wesentlich.
4. Gleitkurventafeln sollen nicht mit vorhandenen brauchbaren Darstellungen in Wettbewerb treten. Die unter 1 und 3 angeführten Fälle enthalten eine Fülle neuer Aufgaben, deren Lösung durch das Gleitkurvenprinzip erschlossen wird.

Berlin-Schöneberg, im Juni 1923. 357

Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen.

Von **HEINRICH HENCKY** in Delft.

Im Jahre 1909 haben Haar und v. Kármán eine Arbeit veröffentlicht[1]), welche grundlegend für die Erkenntnis des Verhaltens plastischer Medien in der Nähe des elastischen Gebietes ist. Wegen der knappen Fassung der Arbeit und wegen der Wahl einer zur praktischen Rechnung wenig brauchbaren Plastizitätsbedingung ist die physikalische Bedeutung der Haar, v. Kármán'schen Entwicklungen aber, wie es scheint, verkannt worden.

[1]) A. Haar und v. Kármán, Göttingen, Nachrichten math. phys. Klasse 1909, S. 204—218.

Im folgenden stellen wir uns die Aufgabe, die physikalische Bedeutung dieses Verfahrens ausführlicher auseinanderzusetzen und zu zeigen, daß man auf diesem Wege tatsächlich zu einem System von Differentialgleichungen gelangt, welches das ganze Gebiet der plastisch elastischen Gleichgewichtsprobleme beherrscht. Im Zusammenhang damit wird sich auch herausstellen, welche Bedeutung den Nachspannungen zukommt, welche nach einer plastischen Formänderung im Material zurückbleiben.

Wir werden auf diese Weise zu dem Ergebnis kommen, daß die sogenannte Verfestigung des Materials bei bleibenden Formänderungen sich auf zwei verschiedene Ursachen zurückführen läßt. Die eine hiervon ist eine Selbstverspannung des elastisch plastischen Materials, wodurch sich der Körper gewissermaßen gegen eine Wiederholung der plastischen Deformationen bei wiederholter Belastung und Entlastung schützt. Diese Verfestigung ist unserer Theorie noch zugänglich. Die andere Ursache der Verfestigung dagegen hängt mit den Vorgängen in dem krystallinischen Kleingefüge oder mit den Veränderungen der molekularen Struktur zusammen, und läßt sich durch unsere Theorie nicht erklären, wohl aber in dem Ansatz für die Plastizitätsbedingung angenähert berücksichtigen [1]).

Die gewöhnlich als Plastizitätsbedingung eingeführte Hypothese von St. Venaut, welche die Plastizität von den größten Schubspannungen abhängig macht, werden wir durch eine andere ersetzen, deren Uebereinstimmung mit der Erfahrung durch neuere Versuche besser bewiesen ist.

1. Die physikalisch mechanischen Grundlagen des Problems, an einem einfachen Modell entwickelt. Um gleich von vornherein das Feld unserer Untersuchung zu begrenzen, sei ausdrücklich vorausgesetzt, daß sowohl die elastischen als auch die bleibenden Formänderungen so klein bleiben, daß die Quadrate der Komponenten des Verzerrungstensors gegen die ersten Potenzen vernachlässigt werden können. Es gibt natürlich auch noch eine andere Form des Gleichgewichts, wobei die elastischen Deformationen vollkommen zurücktreten und die plastische Bewegung dadurch zum Stillstand kommt, daß die äußeren Kräfte durch Umlagerung der Angriffspunkte die Bedingungen des Gleichgewichts schaffen. Die Untersuchung derartiger Gleichgewichtszustände fällt aber nicht in den Rahmen dieser Untersuchungen.

Ferner sei vorausgesetzt, daß die Formänderungen sich isotherm und langsam vollziehen. Die bei bleibenden Formänderungen entstehende Wärme denken wir uns abgeführt. Bis zu welcher Größe der Formänderungskomponenten diese Annahme unschädlich ist, kann unschwer angenähert ermittelt werden.

Der Haar, v. Kármán'sche Ansatz geht von der Erkenntnis aus, daß bei jeder plastischen Deformation, die zu einem Gleichgewichtszustand führt, das Stillstehen der plastischen Deformationen nur einem elastischen Kern zu verdanken ist, der stets vorhanden sein muß, wo das Gleichgewicht ohne Wegnahme der äußeren Kräfte eintritt. Um einen besseren Einblick in das Wesen des plastisch elastischen Gleichgewichts zu bekommen, wollen wir uns ein Modell konstruieren, an dem sich alle wesentlichen Vorgänge unschwer rechnerisch verfolgen lassen.

Dieses Modell ist in Abb. 1 dargestellt und besteht aus einem aus 3 Stäben zusammengesetzten, einfach statisch unbestimmten Fachwerk, bei welchem die Querschnittflächen der Stäbe 1 und 2 sich wie 4 : 1 verhalten.

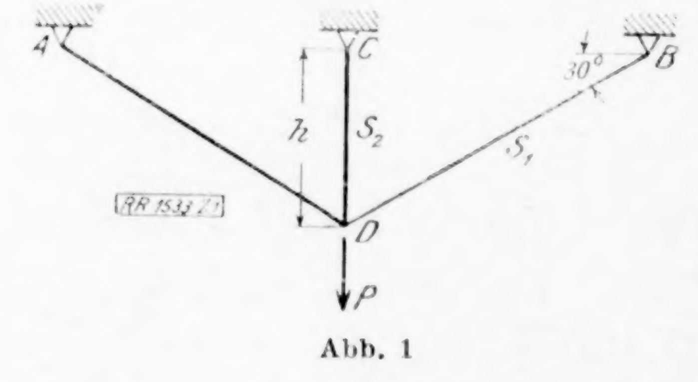


Abb. 1

Fehlt der Stab 2, so ist offenbar ein plastisches Gleichgewicht für eine innerhalb gewisser Grenzen willkürliche Last unmöglich, wir haben einen Grenzzustand des Gleichgewichts vor uns.

Unter einem vollplastischen Zustand wollen wir künftig (in teilweiser Verallgemeinerung des bisherigen Gebrauchs dieser Bezeichnung) einen Grenzzustand des Gleichgewichts verstehen, bei welchem wir den Spannungszustand unabhängig von den Deformationen bestimmen können.

[1]) Der Hauptteil der sogenannten »Verfestigung« dürfte sich auf Zähigkeitserscheinungen bei sehr langsamer plastischer Bewegung zurückführen lassen. Eine Theorie dieser Bewegung, welche die im folgendem entwickelte plastische Statik durch eine entsprechende »Dynamik« ergänzt, erscheint in dieser Zeitschrift. (Anmerkung bei der Korrektur.)

Bei unserem statisch unbestimmten Modell tritt dieser Zustand ein, sobald wir $P = 10\,fk$ — wobei $2\,k$ als Grenzspannung für den einachsigen Spannungzustand festgesetzt sei — machen, denn in diesem Fall ist sowohl σ_1 als auch $\sigma_2 = 2\,k$.

Wir unterscheiden nun die folgenden Gebiete:

das elastische Gebiet von $0 \leq P \leq 4\,kf$,
das erste Stadium der Plastizität von $4\,kf \leq P \leq 8\,kf$,
das zweite Stadium der Plastizität von $8\,kf \leq P \leq 10\,kf$.

Es bezeichne: σ' die Spannung, die sich bei unbegrenzter Gültigkeit der Hookeschen Annahme ergeben würde;

σ^0 die Spannung, welche nach Wegnahme der äußeren Last im System zurückbleibt;

σ die Spannung, welche den plastisch-elastischen Gleichgewichtszustand charakterisiert.

Dann gilt, wie man ohne weiteres einsieht, bis zu einem $\sigma^0 \leq 2\,k$ die Gleichung

$$\sigma = \sigma^0 + \sigma' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Den Zustand des plastischen Gleichgewichts, bei welchem $\sigma^0 \leq 2\,k$, wollen wir das erste Stadium der Plastizität nennen; wird die Gl. (1) ungültig, so haben wir das zweite Stadium der Plastizität.

Wir wollen die Gl. (1) zunächst für $P = 8\,kf$ durch direkte Berechnung nachweisen.

Die Spannungen σ' sind in diesem Fall

$$\sigma_1' = +\,k \qquad \sigma_2' = +\,4\,k.$$

Die wirklichen Spannungen findet man, indem man den plastisch gewordenen Stab 2 herausnimmt und durch die in ihm wirkende Kraft $2\,kf$ ersetzt, zu

$$\sigma_1 = +\,{}^3/_2\,k \qquad \sigma_2 = +\,2\,k.$$

Entlastet man nun, so ist Stab 2 zu lang geworden und muß deshalb mit Gewalt zusammengedrückt werden.

Dabei entsteht infolge Verkürzung von Stab 1 eine Verschiebung von D um

$$^3/_2\,\frac{k}{E}\cdot 2\,h\cdot 2 = 6\,k\,\frac{h}{E}.$$

Stab 2 sucht sich zu verkürzen um $2\,k\,\frac{h}{E}$.

Es bleiben also $4\,k\,\frac{h}{E}$ übrig und es ist eine Vorspannkraft X nötig, welche die Gleichung erfüllt

$$\frac{X\cdot h}{f\cdot E} + \frac{X\cdot 2\,h}{4\,f\cdot E}\cdot 2 = 4\,k\,\frac{h}{E} \quad \text{oder} \quad X = 2\,kf,$$

und somit $$\sigma^0_1 = +\,\frac{k}{2}, \quad \sigma^0_2 = -\,2\,k.$$

Die Gl. (1) aber fordert

für Stab 1 $\quad {}^3/_2\,k = \frac{k}{2} + k,$

» » 2 $\quad 2\,k = -\,2\,k + 4\,k.$

Damit haben wir einen wichtigen Satz über die Vorspannungen[1]) gewonnen.

Ueberschreiten die Nachspannungen, die nach Wegnahme der Last zurückbleiben, nicht die Plastizitätsgrenze, so führt die plastische Verzerrung des Materials zu einer Verfestigung durch Selbstverspannung derart, daß bei einer zweiten gleichen oder quantitativ kleineren Last nur elastische Formänderungen eintreten.

Die Geraden $D'F'$ und $D''F''$ in Abb. 2 stellen die Spannungsdehnungslinien bei wiederholter Belastung dar und zeigen, wie die Konstruktion gegen die »Krankheit« der Plastizität immun geworden ist, allerdings um den Preis einer bleibenden Deformation DD'

[1]) oder Nachspannungen.

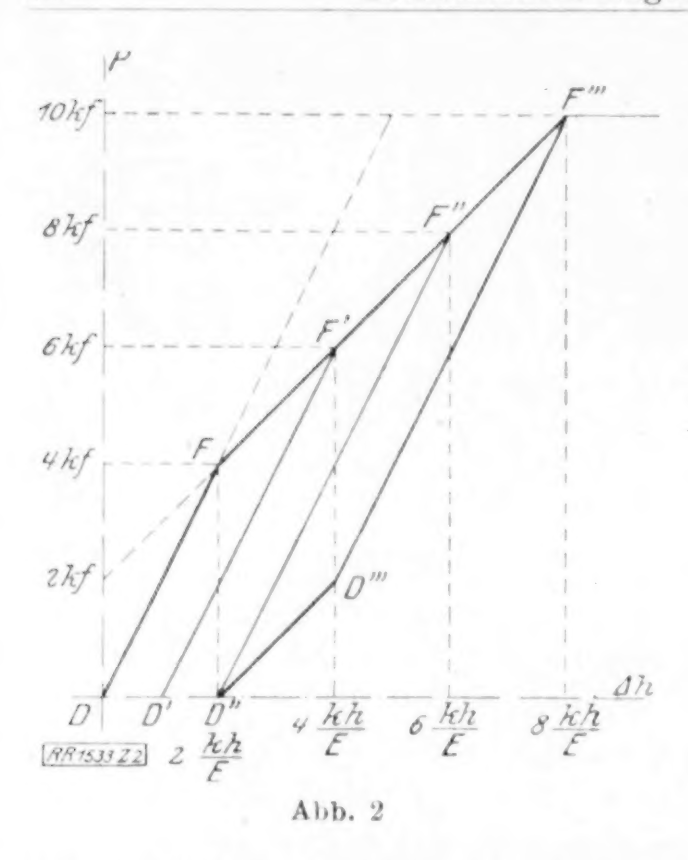


Abb. 2

beziehungsweise DD''. Mit Δh sind in Abb. 2 die lotrechten Verschiebungen des Punktes D unter der Last P bezeichnet.

Steigern wir die Last P über $8\,fk$, so bleiben bei der Entlastung die Vorspannungen des Belastungsfalles $8\,fk$ bestehen und es ergibt sich bei der ersten Belastung mit Entlastung die Linie $D\,F\,F'''\,D'''\,D''$. Da sich aber die plastische Verlängerung bei jeder Belastung wiederholt und bei Entlastung wieder rückgängig wird, so ist klar, daß auf diese Weise der Stab 2 zerstört werden muß. (Es geht bei jedem Zykel eine Arbeit $D''F''F'''D'''$ in Wärme über.)

Dieser von uns als zweites Stadium bezeichnete Zustand führt also nicht zur Verfestigung, sondern zum lokalen Bruch, wenn er öfters wiederholt wird.

Das Diagramm der Abb. 2, welches dem Spannungsdehnungsdiagramm analog ist, gibt uns auch noch Aufklärung hinsichtlich der verbrauchten Arbeit. Entlasten wir nach $P = 8\,kf$, so erhalten wir eine verlorene Arbeit von

$$\frac{2\,kh}{E} \cdot 6\,kf = 12\,k^2\,\frac{hf}{E}.$$

Die in dem Vorspannungssystem aufgespeicherte Arbeit ist aber

$$A_v = \frac{1}{2\,E} \cdot \frac{h^2}{4} \cdot 2\,k \cdot 4\,f \cdot 2 + \frac{1}{2\,E}\,4\,k^2 fh = 4\,k^2\,\frac{hf}{E}.$$

Also nur der dritte Teil der Arbeit der äußeren Kräfte wird in Form von einem Vorspannungssystem in dem Körper aufgespeichert. Trotzdem erhöht die in Wärme umgewandelte verlorene Energie von $8\,k^2\,\frac{hf}{E}$ die Temperatur des Stabes 2 noch um keinen Grad Celsius. Die Annahme isotherner Formänderung ist also wohl zulässig.

Die gewonnenen Einsichten lassen sich natürlich ohne weiteres auf den kontinuierlichen Körper übertragen. Wenn wir uns vorstellen, daß wir die plastisch gewordenen Spannungen aussondern und ganz wie äußere Kräfte behandeln können, erkennen wir, daß die Spannungsberechnung bei plastischen Zuständen leichter sein muß, da doch die Zahl der statischen Unbestimmtheiten herabgemindert wird.

Wir erkennen, daß ein elastischer Körper bei Eintritt in den plastischen Zustand, der wie gesagt, nichts weiter ist als eine Herabminderung des Grades der statischen Unbestimmtheit des Problems, imstande ist, einen Teil der Arbeit der äußeren Kräfte bei der ersten, mit plastischer Bewegung verbundenen Belastung in die elastische Energie eines Vorspannungssystems umzuwandeln. Dieses Spannungssystem führt zu einer erhöhten Widerstandsfähigkeit, so lange wir uns im ersten Stadium der Plastizität befinden. Die Fließgrenze wird gehoben, innerhalb des ersten Stadiums tritt keine weitere plastische Deformation mehr ein.

Um indessen die Plastizität von kontinuierlichen Körpern mit Erfolg untersuchen zu können, brauchen wir eine Plastizitätsbedingung, und da wir Isotropie voraussetzen, kann die Plastizitätsbedingung nur aus den Orthogonalinvarianten des Spannungstensors gebildet werden. Zu ihrer Aufstellung wollen wir nunmehr übergehen.

2. Die Plastizitätsbedingung. Bereits St. Venaut hat klar erkannt, daß Plastizität und Bruch zwei grundverschiedene Vorgänge sind, und hat demgemäß die Plastizität von dem Bruchvorgang scharf unterschieden. Der Bruchvorgang überlagert sich nun aber stets bei Versuchen, durch welche der Fließvorgang beobachtet werden soll, über das Gebiet der plastischen und sogar elastischen Formänderung. Da es sich dabei gewöhnlich um feine, nicht näher wahrnehmbare Risse in dem krystallinischen Gefüge handelt, ist eine Beurteilung der Versuche nicht so einfach.

Von vornherein ist klar, daß ein hydrostatischer Druck oder Zug auf die Plastizität selbst keinen Einfluß haben kann. Wenn Zug-Versuche einen

solchen Einfluß vortäuschen, so liegt das nur an der Störung, welche der (unsichtbare) Bruchvorhang hereinbringt.

Die naheliegendste Hypothese ist nun, anzunehmen, daß bei einer konstanten Energie der elastischen Gestaltsänderung die Plastizitätsgrenze erreicht wird, daß also diese Verformungsarbeit das Maß der plastischen Härte ist. Entsprechend der obigen Bemerkung über die hydrostatischen Druck- und Zugkräfte verstehen wir unter Verformungsenergie den Teil des elastischen Potentials, der unabhängig ist von den hydrostatischen Kräften [1]).

Setzen wir noch als Plastizitätsgrenze für den einachsigen Spannungszustand die Größe $2k$ an, so erhalten wir als Plastizitätsbedingung (G Schubelastizitätsmodul)

$$\Phi = \frac{1}{2G}\left\{ {}^1/_6 \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\right] + \tau_{xy}{}^2 + \tau_{xz}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 \right\} - {}^2/_3 \frac{k^2}{G} = 0 \quad (2).$$

Diese Plastizitätsbedingung hat zuerst in etwas anderer Form und Begründung Herr v. Mises in einer Abhandlung über Plastikodynamik [2]) aufgestellt [3]). Sie läßt sich vereinfachen, wenn man zu den Hauptspannungen übergeht.

Mit σ_1, σ_3, σ_3 als Hauptspannungen wird aus (2)

$$\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3 = 4k^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Führen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit den Achsen σ_1, σ_2, σ_3 ein, so bedeutet die Gleichung (3) einen Kreiszylinder mit dem Radius $2k\sqrt{{}^2/_3}$, während die Achse gleiche Winkel mit den positiven Koordinatenrichtungen einschließt. Diese Darstellung des Spannungszustandes besitzt für unsere Zwecke größere Brauchbarkeit als die von Mohr und erlaubt eine leichtere Beurteilung der Versuchsergebnisse.

Alle Spannungszustände, die Punkten im Innern des Kreiszylinders entsprechen, liegen im elastischen Gebiet. Für die Punkte des Kreiszylinders dagegen haben wir den plastischen Zustand. Die Punkte außerhalb des Kreiszylinders repräsentieren unmögliche Spannungszustände. In Abb. 3 ist der Schnitt dieses Kreiszylinders mit der $\sigma_1\,\sigma_2$-Ebene dargestellt. Die Schnittellipse begrenzt das plastische Gebiet des ebenen Spannungszustandes.

Abb. 3

Haben wir dagegen einen Zustand der ebenen Verzerrung, so wird $\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}$ und nach Einsetzen in Gl. (3)

$$\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 - \sigma_1\sigma_2 \frac{m^2 + 2m - 2}{m^2 - m + 1} = 4k^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Die große Achse dieser Ellipse schließt mit den Koordinatenachsen gleiche Winkel ein. Wir erhalten:

für $m = 2$	große	Achse	$= 2k\infty$
$m = 3$	»	»	$= 2k\sqrt{14}$
$m = 4$	»	»	$= 2k\,{}^1/_2\sqrt{13}$
$m = 0$	»	»	$= 2k\sqrt{2}$

[1]) Vergl. A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. I, S. 40 u. 51.

[2]) Vergl. v. Mises, Göttinger Nachrichten 1913, S. 582 bis 592.

[3]) Bei der Diskussion dieser Plastizitätsbedingung auf dem Internationalen Kongresse für angewandte Mechanik in Delft im April dieses Jahres ergab sich, daß dieselbe bereits im Jahre 1904 von Herrn M. T. Huber (Lemberg) aufgestellt wurde. Hinsichtlich Literaturangaben sei auf den demnächst erscheinenden Abdruck der Verhandlungen des Kongresses verwiesen. (Anmerkung bei der Korrektur.)

Die kleine Achse bleibt dem Radius des Zylinders gleich. Wir sehen hieraus, daß beim ebenen Verzerrungszustand alles von der Größe m abhängt. Die Kurve für $m = \infty$ ist identisch mit der Kurve für den ebenen Spannungszustand $\sigma_3 = 0$. Bei diesem ebenen Spannungszustand erhalten wir für $\sigma_1 = \sigma_2$ die Fließgrenze $\sigma_1 = \sigma_2 = 2k$, während amerikanische Versuche[1]) etwa $2k \cdot 1{,}2$ ergeben. Dieser Unterschied ist aber wohl auf den Umstand zurückzuführen, daß die bei biaxialen Versuchen gewöhnlich verwendeten dünnwandigen Röhren senkrecht zur Walzrichtung eine andere Härte besitzen; auch die Walzhaut allein dürfte schon einen verzögernden Einfluß haben. Die beste Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen dürfen wir in den beiden negativen Quadranten erwarten (mit einer positiven und einer negativen Hauptspannung). In der Tat zeigen neuere Versuche[2]), daß das von uns angenommene Plastizitätsgesetz hier erfüllt ist und daß somit eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür besteht, daß die Hypothese der konstanten Verformungsarbeit ebenso das plastische Gebiet beherrscht wie das Hookesche Gesetz das elastische. Für die Punkte $A_1\, A_1'$ (Abb. 3), die den reinen Schub repräsentieren, geben neuere amerikanische Versuche[3])

$$\sigma_1 = \pm\, 2\,k \cdot 0{,}6; \qquad \sigma_2 = \pm\, 2\,k \cdot 0{,}6$$

im Durchschnitt, während wir

$$\sigma_1 = \pm\, 2\,k \cdot 0{,}577; \qquad \sigma_2 = \mp\, 2\,k \cdot 0{,}577$$

erhalten. Die bisher allgemein angenommene Ansicht über den Mechanismus der plastischen Deformation, welche an dieser Stelle $0{,}5 \cdot 2\,k$ verlangt, wird durch diese Versuche auf das Bestimmteste widerlegt. Trotzdem steht aber die Hypothese der konstanten Gestaltänderungsenergie mit der Ansicht, daß die Plastizitätsgrenze durch einen Maximalwert der größten Schubspannung charakterisiert wird, in einem engen Zusammenhang. Diese letztere Hypothese drückt sich in den Gleichungen aus

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \leqq 4\,k^2, \quad (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \leqq 4\,k^2, \quad (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \leqq 4\,k^2 \quad . \; . \; . \quad (5),$$

welche im $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$-Raum die Gleichungen eines regulären sechsseitigen Prismas[4]) darstellen, dessen Schnitt mit der $\sigma_1\,\sigma_2$-Ebene in der Abb. 3 gezeichnet ist.

Wir erhalten dabei das bemerkenswerte Resultat, daß unser Zylinder der konstanten Verformungsarbeit diesem Prisma umschrieben ist, daß also die bisherige Plastizitätshypothese von St. Venant als eine erste Näherung weiter bestehen bleibt. Für den Fall der ebenen Verzerrung mit $m = 2$, ferner für rotationssymmetrische räumliche Probleme, bei denen das Spannungsellipsoid aus Symmetriegründen ein Rotationsellipsoid wird, sind beide Hypothesen identisch.

Daß sonach durch unser neues Härtemaß qualitativ dasselbe geleistet wird, wie durch die Theorien von St. Venant, Gnest, Mohr, bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

Obgleich der Unterschied beider Annahmen nicht bedeutend erscheint, muß er beim quantitativen Vergleich doch ins Gewicht fallen, denn die bei Annahme der Gl. (5) wegfallenden Zylindersegmente enthalten gerade die intensivsten Spannungszustände und lassen daher für das räumliche Problem eines eindringenden Stempels[5]) eine wesentlich bessere Uebereinstimmung mit der Erfahrung erwarten, als die ist, welche mit der Gl. (5) erreicht werden kann.

3. Die Differentialgleichungen des plastischen Gleichgewichts. Wir gehen dazu über, die bisherigen Einsichten in die physikalisch-mechanischen Vorgänge bei plastisch-elastischen Gleichgewichtszuständen zu Differentialgleichungen auszugestalten, welche die Gruppe dieser Naturerscheinungen beherrschen. Der mathematische Teil dieser Arbeit ist schon durch die bereits zitierte Arbeit von Haar und v. Kármán vorweggenommen, so daß wir uns im folgenden eng an die Darstellungsweise dieser Autoren anschließen werden.

---

[1]) Betreffend diese Versuche vergleiche die Schrift von H. M. Westergaard, On the Resistance of ductile materials . . . . in Journal of the Franklin Institut. May 1920, S. 627 bis 640. Besonders sei auf die Abb. 4 S. 634 hingewiesen.

[2]) H. Bonte, Z. d. V. d. I. Bd. 64, Nr. 51, S. 1071 bis 1072. Die Versuche von Bonte überdecken den Teil der Ellipse zwischen DK (Abb. 3), liegen aber etwas außer derselben.

[3]) University of Illinois Bulletin. Becker, Steel onder biaxial loading vol. XIII, Nr. 32, S. 45. Seely and Putman, The relation between the elastic strengths of steel, vol. XVII, Nr. 11, S. 41 u. 42.

[4]) Vergl. Westergaard, loc. cit. S. 637.

[5]) Diese Zeitschrift Bd. 3, 1923, S. 281 und L. Prandtl, Bd. 3, 1923, S. 406.

Die grundlegende Voraussetzung ist dabei, daß überhaupt ein Gleichgewichtszustand eintritt. Da die Gleichungen, welche wir erhalten werden, nicht linear sind, so muß diese Voraussetznng ausdrücklich vorangestellt werden.

Der Eintritt eines solchen Gleichgewichtszustandes, bei dem die Auflast innerhalb gewisser Grenzen willkürlich ist, setzt voraus, daß im Körper ein elastischer Kern vorhanden ist.

Bei der Berechnung eines Fachwerkes oder eines ebenen Spannungsproblems können wir einen elastischen Kern als ganzes absondern dadurch, daß wir an der Grenze die plastischen Kräfte zu den äußeren Lasten zählen. Im Raum aber durchdringen sich die plastischen und elastischen Gebiete so, daß wir eine Aussonderung nicht ohne weiteres vornehmen können. Abgesehen von dieser Scheidung der Gebiete, die mehr äußerlicher Natur ist, haben wir auch eine Scheidung, die die Plastizitätsbedingung in jedem einzelnen Element vollzieht. Wir müssen uns dabei das Körperelement gewissermaßen als ein Gefäß, gefüllt mit elastischer Verzerrungsenergie, vorstellen; wird zuviel Gestaltänderungsenergie hineingegossen, so läuft das Gefäß über, welchen Vorgang wir als Plastizität bezeichnen. Was aber einmal in dem Gefäß war, bleibt darin, solange die Neigung zum Ueberlaufen anhält.

Da die Dilatations- oder Kompressionsenergie von vornherein rein elastisch ist, dürfen wir für die Energiedichte des elastischen Kerns (dieses Wort im weitesten Sinn verstanden) das elastische Potential setzen

$$A = \frac{1}{2E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z) \quad . \quad (6),$$

wobei E der Elastizitätsmodul und G der Schubmodul. Der Satz vom Minimum der Deformationsarbeit verlangt, daß das Integral $\int\int\int A\,dx\,dy\,dz$, erstreckt über alle Elemente des Körpers, einen Extremwert annimmt.

Als Nebenbedingungen dieses Variationsproblems haben wir dabei die 3 Gleichgewichtsbedingungen

$$L = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad M = \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad N = \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (7),$$

wobei wir die Massenkräfte der Einfachheit halber weglassen und die Grenzbedingung für die elastische Verformungsenergie $\Phi = 0$ nach Gl. (2) einführen. Diese Bedingung multiplizieren wir mit der Ortsfunktion φ und addieren sie zu dem Integral der elastischen Formänderungsarbeit.

Sind u, v, w die elastisch-plastischen Verschiebungen eines Volumenelementes, so haben wir nach den Regeln der Variationsrechnung[1]) das Integral $\int W\,dx\,dy\,dz$ zu einem Extremen zu machen, wobei

$$W = A + Lu + Mv + Nw + \varphi\Phi \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (8).$$

Die Größen u, v, w, φ hängen allein von dem Ort x, y, z ab. Ihre Differentialquotienten nach den Spannungsgrößen sind Null[2]).

Das Variationsproblem liefert in bekannter Weise 6 Differentialgleichungen vom Typus

$$\frac{\partial W}{\partial\sigma_x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right)}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial z}\right)}\right) = 0,$$

welche nach Ausführung der Differentiationen in die Gleichungen übergehen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial(A+\varphi\Phi)}{\partial\sigma_x} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \frac{\partial(A+\varphi\Phi)}{\partial\tau_{xy}} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\\
\frac{\partial(A+\varphi\Phi)}{\partial\sigma_y} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \frac{\partial(A+\varphi\Phi)}{\partial\tau_{xz}} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\\
\frac{\partial(A+\varphi\Phi)}{\partial\sigma_z} &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \frac{\partial(A+\varphi\Phi)}{\partial\tau_{yz}} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (9).$$

Auch aus diesen Formeln sehen wir, daß die einfachste Plastizitätsbedingung, welche ein praktisch brauchbares Gleichungssystem liefert, nur eine quadratische Funktion der Spannungskomponenten sein kann.

[1]) Vergl. etwa Madelung, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin 1922, S. 103.

[2]) Unter diesen Umständen können die Ableitungen von φ auch unstetig sein.

Wir führen nun noch den Verzerrungstensor ein, der mit dem Spannungstensor $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ nach dem Hookeschen Gesetz zusammenhängt, also

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x, \quad \frac{\partial A}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy}, \quad \frac{\partial A}{\partial \sigma_y} = \varepsilon_y, \quad \frac{\partial A}{\partial \tau_{xz}} = \gamma_{xz}, \quad \frac{\partial A}{\partial \sigma_z} = \varepsilon_z, \quad \frac{\partial A}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz} \quad . \quad (10).$$

Dieser Tensor $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ genügt aber natürlich nicht den Kompatibilitätsbedingungen der Elastizitätstheorie, er ist nicht aus dem Feld eines Verschiebungsvektors abzuleiten.

Wir erhalten vielmehr mit Gl. (9)

$$\left.\begin{aligned}
\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_x; \quad & \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xy}} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \gamma_{xy} \\
\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} &= \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_y; \quad & \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xz}} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{xz} \\
\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_z} &= \frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_z; \quad & \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{yz}} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Im elastischen Gebiet ist $\varphi = 0$ zu setzen.

Rechnet man φ aus der Plastizitätsbedingung $\Phi = 0$, so erhält man als Kennzeichen, daß man sich im rein elastischen Gebiet befindet, ein negatives φ, als Kennzeichen, daß man sich an der Grenze des rein elastischen Gebietes befindet, aber $\varphi = 0$.

Die Gleichung $\varphi = 0$ ist also die Gleichung der Fläche, welche das rein elastische Gebiet von dem Gebiet der bleibenden Formänderungen scheidet. Die negativen Werte von φ haben demnach keinen Sinn.

Im plastischen Gebiet geben die Gleichungen (11) die Komponenten des Verzerrungstensors an, der als bleibende Deformation zurückbleibt, wenn man das Element ganz aus dem Zusammenhang herausschneidet und alle Spannungen wegnimmt.

Führen wir noch die Abkürzung $\sigma = {}^1/_3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ ein, so werden die Differentialquotienten von Φ

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{2G}(\sigma_x - \sigma); \quad & \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xy}} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} &= \frac{1}{2G}(\sigma_y - \sigma); \quad & \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xz}} &= \frac{1}{G}\tau_{xz} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_z} &= \frac{1}{2G}(\sigma_z - \sigma); \quad & \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{yz}} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Setzt man diese Beziehungen in die Gl. (11) ein, so erhält man die gesuchten Differentialgleichungen der plastisch elastischen Deformation

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1+\varphi}{2G}\left\{\sigma_x - \frac{\varphi + \frac{3}{m+1}}{\varphi + 1}\,\sigma\right\} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1+\varphi}{2G}\left\{\sigma_y - \frac{\varphi + \frac{3}{m+1}}{\varphi + 1}\,\sigma\right\} \\
\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1+\varphi}{2G}\left\{\sigma_z - \frac{\varphi + \frac{3}{m+1}}{\varphi + 1}\,\sigma\right\} \\
\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1+\varphi}{G}\tau_{xy}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} &+ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1+\varphi}{G}\tau_{xz}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1+\varphi}{G}\tau_{yz}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (13\,\mathrm{a}).$$

Diese Gleichungen sind zusammen mit den 3 Gleichgewichtsbedingungen Gl. (7) und der Plastizitätsbedingung Gl. (2) ausreichend, um die 10 unbekannten Funktionen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, u, v, w, \varphi$ zu bestimmen. Wir sehen, daß die Plastizität sich in einer scheinbaren Aenderung der Elastizitätsmoduln äußert.

Der Schubmodul wird mit $\frac{1}{1+\varphi}$ reduziert, das Material also weicher, die Querkontraktionsziffer dagegen wird näher an 2 gerückt in dem Maße, als die plastischen Deformationen zunehmen. Die neue Querkontraktionsziffer wird

$$m_\varphi = \frac{2\varphi + \frac{3m}{m+1}}{\varphi + \frac{3}{m+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13\,\mathrm{b}).$$

Bei praktischen Aufgaben ist es ganz gut möglich, zuerst näherungsweise $m = 2$ zu setzen, wodurch man ein vereinfachtes Gleichungssystem erhält. Man kann allerdings nicht gut den plastischen Teil für sich behandeln, da sonst die Kompabilitätsbedingung verletzt wird.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1+\varphi}{2G}(\sigma_x - \sigma); \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1+\varphi}{2G}(\sigma_y - \sigma); \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1+\varphi}{2G}(\sigma_z - \sigma) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1+\varphi}{G}\tau_{xy}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1+\varphi}{G}\tau_{xz}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1+\varphi}{G}\tau_{yz}\end{array}\right\} \quad . \quad (14),$$

mit der Plastizitätsbedingung

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\,(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = 8k^2 \quad . \quad . \quad (15).$$

Wir haben bereits an unserem Modellbeispiel gesehen, daß wir 2 Stadien der Plastizität unterscheiden können, wobei der eine zur Verfestigung, der andere zur lokalen Zerstörung führt. Wir wollen uns noch mit dem ersten Stadium der Plastizität näher beschäftigen, da dasselbe von praktischer Bedeutung ist.

Da nämlich in diesem Stadium der elastische Körper bei einer zweiten gleichen oder kleineren Belastung keine bleibende Formänderung mehr erleidet, so können wir die Spannungen bei dieser zweiten Belastung nach der gewöhnlichen Elastizitätstheorie berechnen.

Die Komponenten dieses Spannungstensors seien mit

$$\sigma_x', \ \sigma_y', \ \sigma_z', \ \tau_{xy}', \ \tau_{xz}', \ \tau_{yz}'$$

bezeichnet.

Nun bleiben aber nach der ersten mit plastischer Verzerrung verbundenen Belastung die Nachspannungen

$$\sigma_x^0, \ \sigma_y^0, \ \sigma_z^0, \ \tau_{xy}^0, \ \tau_{xz}^0, \ \tau_{yz}^0$$

zurück.

Ueberschreitet dieses Nachspannungssystem nicht die Grenze des plastischen Gebietes, wenn es für sich im Körper zurückgelassen wird, so befinden wir uns im ersten Stadium der Plastizität und haben in diesem Stadium die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x', \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y', \quad \sigma_z = \sigma_z^0 + \sigma_z' \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}', \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^0 + \tau_{xz}', \quad \tau_{yz} = \tau_{yz} + \tau_{yz}'\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Würden wir uns die Aufgabe so stellen, daß wir diesen unbekannten Vorspannungstensor so wählen, daß die elastische Energie des links stehenden Tensors ein Minimum wird, so würden wir wieder auf dieselben Gl. (14) zurückkommen.

Die Selbstverspannung des Körpers wirkt also in dem Sinn, daß das Material um den Preis einer bleibenden Verzerrung sich gegen eine Wiederholung der plastischen Bewegung so gut es geht zu schützen sucht.

Durch die Wahl einer geeigneten Plastizitätsbedingung ist somit die Bahn frei geworden für eine mathematische Theorie der Plastizität, in deren Bereich eine Menge Probleme fallen, für die gegenwärtig noch kein mathematischer Ansatz besteht.

So kann man z. B. versuchen, die Hertzschen Formeln für den Druck zwischen aufeinander gepreßten Körpern, deren Bedeutung im plastischen Bereich gerade beginnen sollte, auf dieses Gebiet auszudehnen.

Ferner eröffnet sich die Möglichkeit, eine Theorie des plastischen Knickes von Platten und Schalen zu entwickeln.

Freilich versagen die gewöhnlichen Integrationsmethoden der klassischen Elastizitätslehre vollkommen. Es dürfte aber möglich sein, durch passende Näherungsmethoden der Schwierigkeiten Herr zu werden, denn der plastische Zustand ist seiner Natur nach von geringerer statischer Unbestimmtheit als der elastische und dürfte Methoden, die mit Iteration arbeiten, weit zugänglicher sein als dieser.

Um die Anwendung der Theorie zu zeigen, wenden wir uns zur Behandlung eines einfachen Beispiels.

4. Beanspruchung eines Scheibenrades über die Streckgrenze[1]**.** Wir betrachten ein Scheibenrad mit innerer Bohrung, welches durch Ausschleudern über die Streckgrenze beansprucht wird. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

Fließgrenze für den einachsigen Zustand $2k = 3000$ kg/cm^2,
Innerer Radius $a = 10$ cm,

[1] Vergl. hierzu Stodola, Dampf- und Gasturbinen. 5. Aufl., S. 893–896.

Aeußerer Radius $b = 100$ cm,

Querkontraktionsziffer $m = \frac{10}{3}$,

Spezifisches Gewicht des Materials $\gamma = 7{,}85$ g/cm³,

Schwerebeschleunigung $g = 981$ cm/sk²,

Winkelgeschwindigkeit $\omega = 300$ sk⁻¹,

$M_0 = {}^1/_8 \left(3 + \frac{1}{m}\right) \frac{\gamma}{g} \omega^2 b^2 = 2890$ kg.

Mit $\varrho = \frac{r}{b}$ erhalten wir unter Voraussetzung unbegrenzter Elastizität die Spannungen

$$\sigma_r' = M_0 \left\{1{,}01 - \varrho^2 - \frac{0{,}01}{\varrho^2}\right\} \qquad \sigma_t' = M_0 \left\{1{,}01 - \frac{19}{33}\varrho^2 + \frac{0{,}01}{\varrho^2}\right\} \quad . \quad . \quad (17).$$

An der inneren Begrenzung wird also $\sigma_t' = 5780$ kg/cm², und es muß von $\varrho = 0{,}1$ bis $\varrho = \varrho_0$ ein plastisches Gebiet entstehen, während von $\varrho = \varrho_0$ bis $\varrho = 1$ wieder der rein elastische Zustand herrscht.

Da die Scheibe dünn gedacht ist, so muß nahegenug ein ebener Spannungszustand vorhanden sein. Der den Spannungszustand im plastischen Gebiet repräsentierende Punkt muß also auf der in Abb. 3 gezeichneten Ellipse liegen.

Wie man sich aus dem Spannungsdiagramm der Abb. 4 überzeugt, erlauben es die Umstände der Aufgabe, innerhalb des Gebietes $0 = \leq \varrho \leq \varrho_0$ die Ellipse durch die Gerade $g-g$ zu ersetzen, welche eine Seite des in die Ellipse einbeschriebenen Zwölfecks bildet. Dadurch bekommt man die lineare Beziehung

$$\sigma_t = 2k + \alpha\sigma_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$
$$\alpha = 2 - \sqrt{3} = 0{,}268.$$

Bei gleicher Scheibendicke erhalten wir als Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in radialer Richtung

$$\sigma_t = \frac{d}{d\varrho}(\varrho\,\sigma_r) + \frac{\gamma}{g}\omega^2 b^2 \varrho^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Mit Gl. (18) können wir diese Gleichung integrieren, wobei wir beachten, daß $\sigma_r = 0$ für $\varrho = \frac{a}{b}$.

Die Lösung wird für $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2 b^2}{3-\alpha}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{3-\alpha}\frac{1}{\varrho^{1-\alpha}} - \varrho^2\right\} + \frac{2k}{1-\alpha}\left\{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\alpha}\frac{1}{\varrho^{1-\alpha}}\right\}\\ \sigma_t &= \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2 b^2}{3-\alpha}\,\alpha\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{3-\alpha}\frac{1}{\varrho^{1-\alpha}} - \varrho^2\right\} + \frac{2k}{1-\alpha}\left\{1 - \alpha\left(\frac{a}{b}\right)^{1-\alpha}\frac{1}{\varrho^{1-\alpha}}\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (20).$$

Im elastischen Gebiet dagegen $\varrho_0 \leq \varrho \leq 1$ haben wir die allgemeine Lösung

$$\sigma_r = M_0\left\{-\varrho^2 + C_1 - C_2\,\varrho_0^2\frac{1}{\varrho^2}\right\}; \qquad \sigma_t = M_0\left\{-\varrho^2\frac{19}{33} + C_1 + C_2\,\varrho_0^2\frac{1}{\varrho^2}\right\}$$

Für $\varrho = 1$ wird $\sigma_r = 0$ das heißt $C_1 = C_2\,\varrho_0^2 + 1$, womit

$$\sigma_r = M_0\left\{1 - \varrho^2 + C_2\,\varrho_0^2\left(1 - \frac{1}{\varrho^2}\right)\right\}; \qquad \sigma_t = M_0\left\{1 - \frac{19}{33}\varrho^2 + C_2\,\varrho_0^2\left(1 + \frac{1}{\varrho^2}\right)\right\}$$

Für $\varrho = \varrho_0$ bilden wir nun den folgenden Ausdruck

$$\frac{1}{M_0}\left\{(\sigma_r + \sigma_t)_0 + \varrho_0^2(\sigma_r - \sigma_t)_0\right\} = 2 - \frac{52}{33}\varrho_0^2 - \varrho_0^4\frac{14}{33}.$$

Dieselbe Zusammensetzung nehmen wir mit den Gl. (20) vor, wodurch wir ebenfalls auf der rechten Seite eine Funktion von ϱ_0 bekommen und aus der Identität der Ausdrücke auf der rechten Seite können wir ϱ_0 berechnen.

$$\frac{1}{M_0}\left\{\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2 b^2}{3-\alpha}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{3-\alpha} - \varrho_0^{3-\alpha}\right](1+\alpha) + \frac{2k}{1-\alpha}\left[2\,\varrho_0^{1-\alpha} - \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\alpha}(1+\alpha)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2 b^2}{3-\alpha}(1-\alpha)\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{3-\alpha}\varrho_0^2 - \varrho_0^{5-\alpha}\right] - 2k\left(\frac{a}{b}\right)^{1-\alpha}\varrho_0^2\right\} = 2\,\varrho_0^{1-\alpha} - \frac{52}{33}\varrho_0^{3-\alpha} - \varrho_0^{5-\alpha}\frac{14}{33}.$$

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir schließlich

$$\varrho_0^{0{,}732} + 0{,}537\,\varrho_0^{2{,}732} = 0{,}396 + 0{,}228\,\varrho_0^2 + 0{,}268\,\varrho_0^{4{,}732}$$

und da ϱ_0 voraussichtlich kleiner als ${}^1/_2$, angenähert

$$\varrho_0^{0{,}732} \cong 0{,}396 + 0{,}016\,\varrho_0^2 \qquad \varrho_0 = 0{,}283.$$

Mit den Werten von α erhält man nun aus den Gl. (20) nach Einsetzen aller Zahlenwerte für $0,1 \leq \varrho \leq 0,283$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= 4100 - \left[2560\,\varrho^2 + 4074,4\left(\frac{0,1}{\varrho}\right)^{0,732}\right] \\ \sigma_t &= 4100 - 0,268\left[2560\,\varrho^2 + 4074\left(\frac{0,1}{\varrho}\right)^{0,732}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20a),$$

woraus für $\varrho = 0,283$

$$\sigma_r = 2000 \text{ kg/cm}^2 \qquad \sigma_t = 3536 \text{ kg/cm}^2.$$

Man überzeugt sich ohne weiteres, daß die Gleichung

$$\sigma_t = 3000 + 0,268 \cdot 200 = 3536 \text{ kg/cm}^2$$

befriedigt ist.

Im elastischen Gebiet von $0,283 \leq \varrho \leq 1$ lassen sich nun auch die Konstanten C_1 und C_2 bestimmen und es wird

$$\sigma_r = 2890\left\{1 - \varrho^2 + 0,0198\left[1 - \frac{1}{\varrho^2}\right]\right\} \qquad \sigma_t = 2890\left\{1 - \frac{19}{33}\varrho^2 + 0,0198\left[1 + \frac{1}{\varrho^2}\right]\right\} \quad (20b).$$

Damit ist das Spannungsproblem gelöst. Das Diagramm der Spannungen ist aus der Abb. 4 zu ersehen. Der schraffierte Teil gibt die Größe der Nachspannungen an,

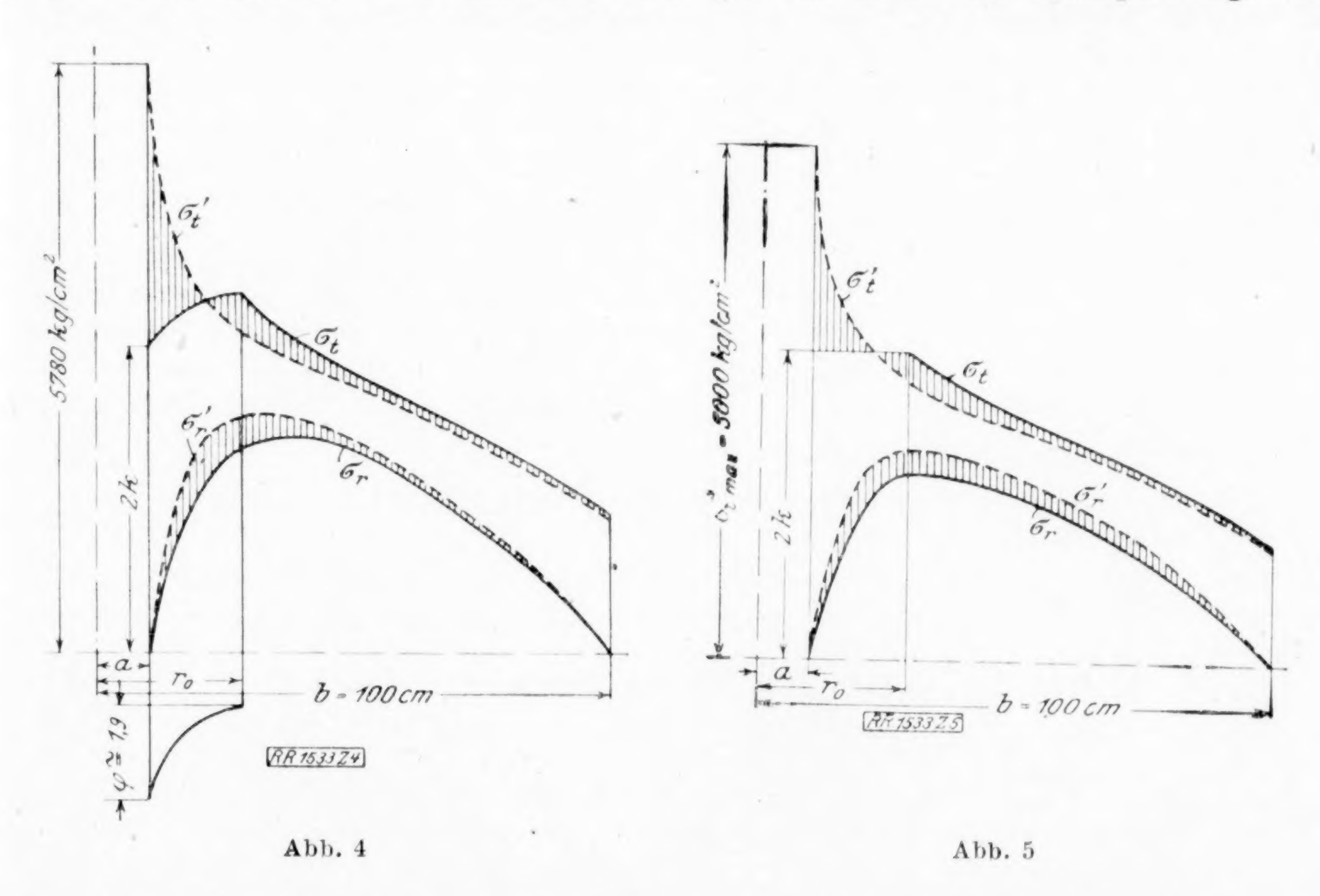


Abb. 4 Abb. 5

die nach Aufhören der Rotation in der Scheibe zurückbleiben. Da die größte Spannung etwas unter 3000 kg/cm² ist, kann die Berechnung der Nachspannungen nach Gl. (16) erfolgen.

Für $\varrho = 0,1$ wird

$$3000 = 5780 + \sigma_0 \quad \text{oder} \quad \sigma_0 = -2780 \text{ kg/cm}^2.$$

Um einen quantitativen Vergleich mit der alten St. Venantschen Plastizitätstheorie zu haben, ist in Abb. 5 der Spannungszustand der Scheibe auch nach dieser Theorie aufgezeichnet.

Bei gleicher Abgrenzung des plastischen und elastischen Gebietes d. h. gleichem ϱ_0 muß in dem letzteren Fall die Winkelgeschwindigkeit um etwa 7 vH geringer genommen werden. Dies war ja auch zu erwarten, denn gerade die weggeschnittenen Ellipsensegmente in Abb. 3 beeinflussen das quantitative Resultat beträchtlich.

Wir wenden uns nun zur Berechnung der Größe φ nach den Gl. (14), wobei wir der größeren Vereinfachung wegen für diese Berechnung $m = 2$ annehmen wollen.

Es wird unter Anwendung von Polarkoordinaten innerhalb des plastischen Gebietes

$$\frac{du}{d\varrho} = b\,\frac{1+\varphi}{2\,G}\,(\sigma_r - \sigma), \qquad \frac{u}{\varrho} = b\,\frac{1+\varphi}{2\,G}\,(\sigma_t - \sigma), \qquad \sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{3} \quad . \;.\; . \quad (21).$$

oder

$$\frac{du}{d\varrho} = \frac{b}{6\,G}\,(1+\varphi)\,(2\,\sigma_r - \sigma_t) \qquad \frac{u}{\varrho} = \frac{b}{6\,G}\,(1+\varphi)\,(2\,\sigma_t - \sigma_r)$$

Durch Elimination von u ergibt sich die Differentialgleichung für die Funktion φ

$$(1+\varphi)\,(2\,\sigma_r - \sigma_t) = (1+\varphi)\,\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho\,(2\,\sigma_t - \sigma_r)\right] + \varrho\,(2\,\sigma_t - \sigma_r)\,\frac{d\varphi}{d\varrho},$$

welche unschwer auf das bestimmte Integral zurückzuführen ist.

$$1+\varphi = \frac{\varrho_0\,(2\,\sigma_t - \sigma_r)_0}{\varrho\,(2\,\sigma_t - \sigma_r)}\,e^{\psi}, \quad \text{wobei } \psi = \int\limits_{\rho=\rho}^{\rho=\rho_0} \frac{\sigma_t - 2\,\sigma_r}{\varrho\,(2\,\sigma_t - \sigma_r)}\,d\varrho \quad . \;.\; .\; . \quad (22).$$

Das Integral in Gl. (22) wird am zweckmäßigsten graphisch ermittelt, wobei die Werte von σ_r und σ_t aus den Gleichungen (20a) einzuführen sind. Für $\varrho = \varrho_0$ wird natürlich

$$1 + \varphi = 1 \text{ oder } \varphi = 0.$$

Der Verlauf der Funktion ist in Abb. 4 eingezeichnet. Für $\varrho = 0{,}1$ erreicht φ den größten Wert $\varphi = 1{,}86$. Der entsprechende genauere Wert der Querkontraktion nach Gl. (13b) würde $m_\varphi = 2{,}35$ sein.

Die Verschiebung des Innenrandes in radialer Richtung wird

$$u = b\,\frac{(1-\varphi)}{2\,G}\left(\sigma_t - \frac{3\,\sigma}{m_\varphi + 1}\right), \qquad \sigma_t = 3000\ \text{kg/cm}^2, \qquad \sigma = \frac{3000}{3} = 1000\ \text{kg/cm}^2,$$

mit $G = 800\,000$ kg/cm² und $b = 100$ cm erhalten wir

$$u = \frac{100 \cdot 2{,}86}{2 \cdot 800\,000}\left(3000 - \frac{3}{3{,}35} \cdot 1000\right) = 0{,}375\ \text{cm}.$$

Bei Stillstand der Scheibe, das heißt Entlastung, erhalten wir eine elastische Verschiebung

$$u' = -\frac{100}{2 \cdot 800\,000}\left(5780 - \frac{9}{13} \cdot \frac{5780}{3}\right) = -0{,}278\ \text{cm}.$$

Die bleibende Verschiebung beträgt also

$$u_0 = 0{,}375 - 0{,}278 = 0{,}097\ \text{cm}$$

oder rd. 1 mm bleibende Vergrößerung von $a = 10$ cm. 376

Biegung und Schub in geraden Balken.[1])

Von CONSTANTIN WEBER in Duisburg.

In vorliegender Arbeit wird die Biegung von Balken von Grund auf aufgebaut unter Vermeidung der üblichen Annahme, daß die Querschnitte eben bleiben. Nach der reinen Biegung werden die Biegung durch eine Querkraft unter Vernachlässigung der Querzusammenziehung und die hierbei auftretenden Hauptschubspannungen, dann die Zusatzspannungen infolge der Querzusammenziehung untersucht, die Begriffe der Biegung ohne Drehung und des Querkraftmittelpunktes festgelegt. Für einige einfache Querschnitte werden die genauen Lösungen für die Schubspannungen gebracht, dann Wege für die Auffindung von Näherungslösungen besonders für die Walzeisenquerschnitte angegeben, und für einige praktisch wichtige Querschnitte die Lage des Querkraftmittelpunktes bestimmt.

1. Allgemeines. Durch den geraden Balken aus vollkommen elastischem Stoff (E Elastizitätsmaß, $G = \frac{E}{2\,(1 + 1/m)}$ Gleitmaß, m Poissonsche Zahl) ist das rechtwinklige

[1]) Gekürzter I. Abschnitt der bisher nicht veröffentlichten Dr.-Arbeit des Verfassers (Technische Hochschule zu Braunschweig). Im II. Abschnitt der Dr.-Arbeit wird der Zustand in den Angriffsquerschnitten der äußeren Kräfte und in der Nähe derselben, im III. Abschnitt die Drehung doppelflanschiger Querschnitte behandelt. Der III. Abschnitt wird ebenfalls gekürzt in dieser Zeitschrift veröffentlicht.

Koordinatensystem, Abb. 1, so gelegt, daß die z-Achse gleichlaufend zur Längsachse, die x-Achse wagerecht, die y-Achse senkrecht in der Querschnittsebene liegen. Infolge der äußeren Kräfte entstehen allgemein die Spannungen σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}, die Verschiebungen ξ, η, ζ, die Drehungen ε_x, ε_y, ε_z und die Schiebungen γ_{xy}, γ_{yz} und γ_{zx}. Zwischen diesen Größen lassen sich die bekannten Beziehungen aufstellen, des weiteren im System Gleichungen aus den Bedingungen des Gleichgewichts aller auf ein Körperteilchen wirkenden Spannungskräfte und ein weiteres System aus den Bedingungen des inneren Zusammenhanges. Im weiteren ist nicht von den allgemeinen Gleichungen ausgegangen, sondern es sind für die sich ergebenden vereinfachten Fälle die Gleichungen unmittelbar aufgestellt, wodurch die Untersuchung an Anschaulichkeit gewinnt.

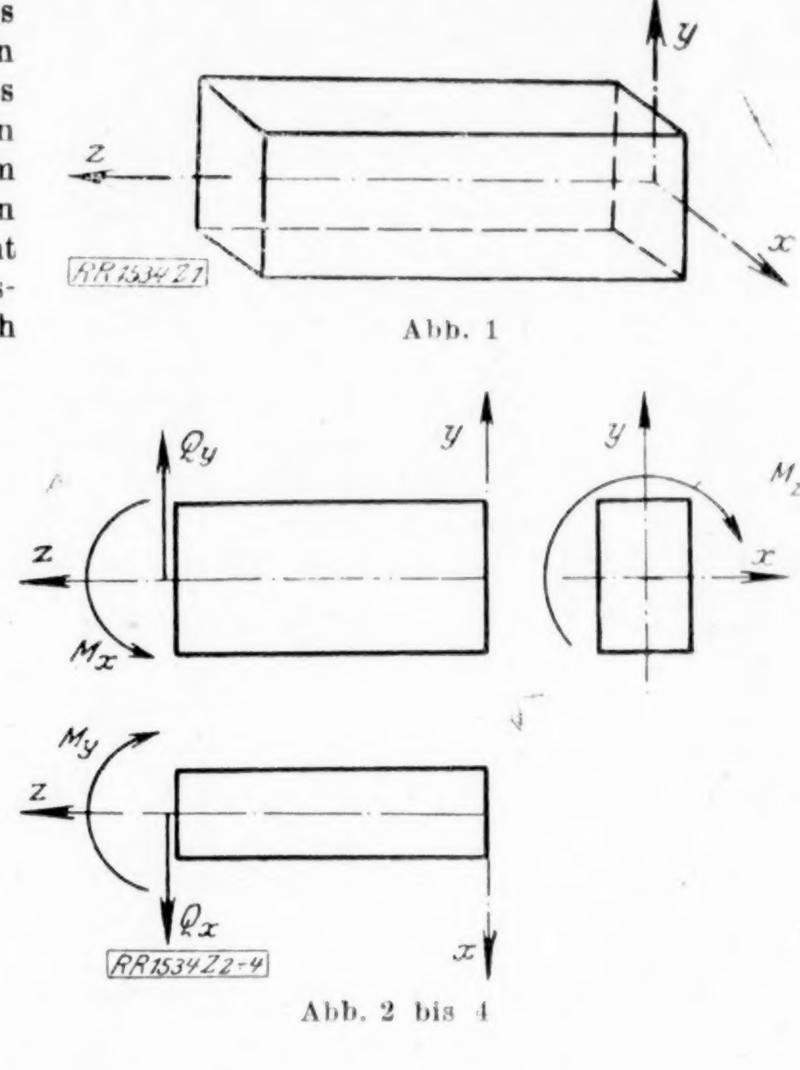


Abb. 1

Abb. 2 bis 4

Wirken auf den Balken Kräfte senkrecht zur Längsachse des Balkens und Kräftepaare, so erhält man nach Abb. 2 bis 4 veränderliche Querkräfte, biegende und ein drehendes Moment. In einer genügenden Entfernung von den Angriffsquerschnitten der äußeren Kräfte erhält man eine bestimmte gesetzmäßige Verteilung der Spannungen, die unabhängig von der Entstehung der Querkräfte und Momente ist. Dieser Teil des Balkens wird als lastenfreier Balkenteil bezeichnet; für diesen ist Q_x, Q_y und M_z unveränderlich und

$$Q_x = \frac{d\,M_y}{d\,z}, \qquad Q_y = \frac{d\,M_x}{d\,z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

2. Reine Biegung. Im lastenfreien Balkenteile wird nur ein unveränderliches biegendes Moment übertragen. Alle Querschnitte bleiben aus Symmetriegründen eben. Die Länge der Längsfaser in der neutralen Schicht, Abb. 5, bleibt unverändert; man erhält im Querschnitt die Nullinie, in der die Längsdehungen gleich null sind. Das Koordinatensystem ist so gelegt, daß die x-Achse mit der Nullinie zusammenfällt. Die verhältnismäßige Längsspannung für $y = 1$ ist gleich σ_0, die Biegungsspannungen sind $\sigma_z = y\,\sigma_0$; weitere Spannungen treten nicht auf. Da die Längskraft

$$Z = \int\limits_{(F)} \sigma_z\, df = \sigma_0 \int\limits_{(F)} y\, df \quad . \; . \; . \quad (2)$$

gleich null ist, so geht die Nullinie durch den Schwerpunkt des Querschnittes. Die Momentengleichungen für die x- und y-Achse geben

$$M_x = \sigma_0\, J_x \quad (3), \qquad M_y = \sigma_0\, J_{xy} \quad (4),$$

hieraus

$$\sigma_0 = \frac{M_x}{J_x} = \frac{M_y}{J_{xy}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

(J_x Trägheitsmoment des Querschnittes für die x-Achse, J_{xy} Zentrifugalmoment für die x- und y-Achse).

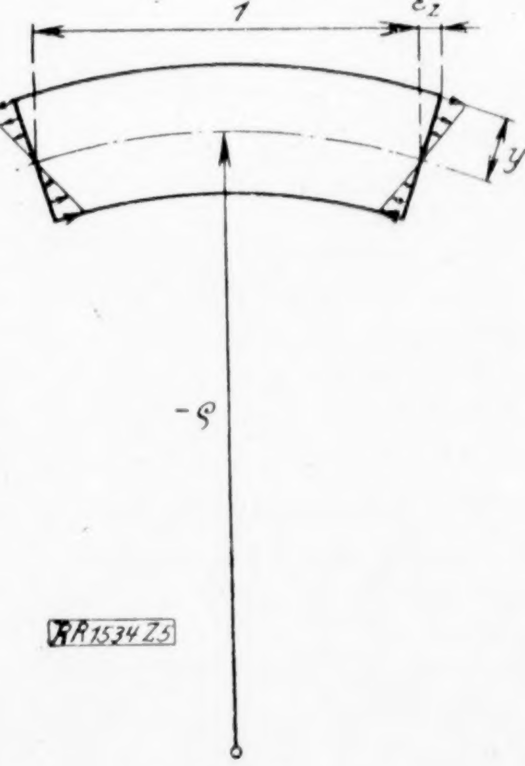


Abb. 5

Die Formänderung besteht in einer gleichmäßigen Krümmung der Längsfasern

$$-\frac{1}{\varrho} = \frac{\varepsilon_z}{y} = \frac{\sigma_z}{y\,E} = \frac{\sigma_0}{E},$$

oder infolge der geringen Krümmung angenähert

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = -\frac{\sigma_0}{E} = -\frac{M_x}{J_x\,E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Infolge der Querzusammenziehung in der x-Richtung, Abb. 6, entsteht die Krümmung der wagerechten Querfasern

$$\frac{1}{\varrho_1} = -\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{\varrho}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{1}{m}\frac{M_x}{J_x E} \quad \ldots\ldots \quad (7).$$

Die Querzusammenziehung in der y-Richtung ruft eine Verzerrung der Querschnitte hervor, bei welcher der Teil der senkrechten Querfasern oberhalb der Nullinie sich verkürzt, der Teil unterhalb derselben sich verlängert. Infolge der gesamten Querzusammenziehung entsteht nur eine Verzerrung der eben bleibenden Querschnitte.

Entsprechende Gleichungen erhält man bei einer Biegung um die y-Achse.

Wirkt auf den Balken nur das biegende Moment M_x, so erhält man durch Ueberlagerung

$$\sigma_z = \frac{M_x\,(y\,J_x - x\,J_{xy})}{J_x\,J_y - J_{xy}^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = -\frac{M_x}{\dfrac{J_x\,J_y - J_{xy}^2}{J_y}\,E} \quad . \quad (9), \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\frac{M_x}{\dfrac{J_x\,J_y - J_{xy}^2}{J_{xy}}\,E} \quad . \quad (10),$$

Abb. 6

und die zur Momentenachse geneigte Nullinie

$$x\,J_{xy} - y\,J_y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

3. Biegung durch eine Querkraft, Abb. 7. Im Nullquerschnitt, $z = 0$, sei das Moment gleich null; es tritt hier nur die Querkraft Q mit den Teilkräften Q_x und Q_y auf. In diesem Querschnitt werden alle Spannungen außer τ_{xy} und τ_{yz} gleich null.

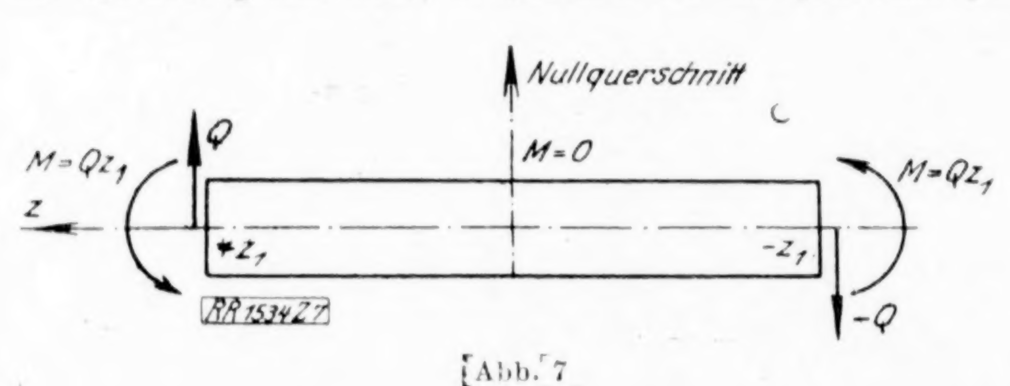


Abb. 7

Im Querschnitte z_1 treten außer den Querkräften Q_x und Q_y noch die Momente $M_x = Q_y z_1$ und $M_y = Q_x z_1$ auf. Ueberlagert man eine reine Biegung mit den Momenten $M_x = -Q_y z_1$ und $M_y = -Q_x z_1$, so verschwindet im Querschnitt z_1 das biegende Moment, und man erhält dieselbe Schubspannungsverteilung wie im Nullquerschnitt.

Hieraus folgt: 1. Die Verteilung der Normalspannungen (Biegungsspannungen) ist im lastenfreien Balkenteil bei einer Biegung durch eine Querkraft dieselbe wie für den Fall der reinen Biegung, nur ist das biegende Moment veränderlich, 2. die Verteilung der Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} ist in allen Querschnitten dieselbe, 3. die Spannungen σ_x, σ_y und τ_{xy} sind gleich null.

Durch Ueberlagerung einer beliebigen reinen Biegung erhält man den allgemeinen Fall der Biegung, für den ebenfalls obige Regeln gelten.

4. Schubspannungen bei Vernachlässigung der Querzusammenziehung senkrecht zu den Längsfasern. Die x-Achse fällt mit der Nullinie des Querschnittes zusammen. Es wird

$$\frac{Q_y}{Q_x} = \frac{M_x}{M_y} = \frac{J_x}{J_{xy}}$$

und

$$\sigma_z = \sigma_0\,y = \frac{M_x}{J_x}\,y = \frac{Q_y}{J_x}\,y\,z = \frac{Q_x}{J_{xy}}\,y\,z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Die verhältnismäßige Spannung wird

$$\sigma_0 = \frac{Q_y}{J_x} z \quad \text{. . . . . (13)}$$

und im Querschnitt $z = 1$

$$\sigma_0' = \frac{Q_y}{J_x} = \frac{Q_x}{J_{xy}} \quad \text{. . . . . (14).}$$

Die Größe wird im weiteren vielfach angewandt und ist nach Gl. (14) zu ersetzen, falls die Querkraft eingeführt werden soll.

Die Formänderung besteht in einer veränderlichen Krümmung, Abb. 8, der Längsfasern, die im übrigen parallel bleiben, falls die Querkraft so liegt, daß **keine Drehung** des Balkens erfolgt:

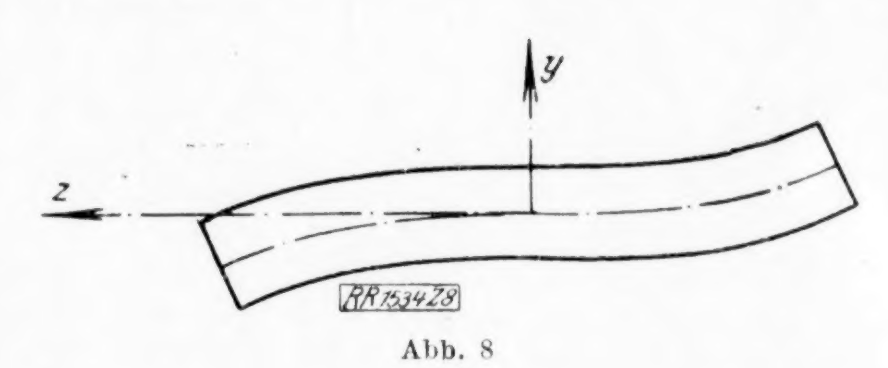


Abb. 8

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = -\sigma_0' \frac{z}{E}, \quad \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} = -\sigma_0' \cdot \frac{1}{E} \quad \text{. . . . . . . (15).}$$

Zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes im Körperteilchen $dx\,dy\,dz$ treten die Schubspannungen τ_{xz}' und τ_{yz}' auf:

$$\frac{\partial \tau_{xz}'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}'}{\partial y} = -\sigma_0' y \quad \text{. . . . . (16).}$$

Man erhält die Schiebungen γ_{xz}' und γ_{yz}':

$$\gamma_{xz}' = \frac{\tau_{xz}'}{G} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \qquad \gamma_{yz}' = \frac{\tau_{yz}'}{G} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad \text{. . . . . . (17)}$$

und hieraus die Gleichung des **inneren Zusammenhanges**

$$\frac{\partial \tau_{xz}'}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}'}{\partial x} = 0 \quad \text{. . . . . (18).}$$

Die Spannungen τ_{xz}' und τ_{yz}' sind die **Hauptschubspannungen**; sie stellen das Gleichgewicht im Balkenteilchen her und übertragen die Querkraft Q.

Die Lösung der Differentialgleichungen (16) und (18) gibt

$$\tau_{xz}' = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \tau_{yz}' = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{. . . . . (19),}$$

wodurch Gl. (18) erfüllt wird. In Gl. (16) eingesetzt, erhält man

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\sigma_0' y$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\Phi = -{}^1/_6\, \sigma_0' y^3 + \Re f(x + iy) \quad \text{. . . . . (20).}$$

Die Spannungen lassen sich hieraus nach Gl. (19) finden. Die Funktion $\Re f(x+iy)$ ist so zu wählen, daß die resultierende Schubspannung τ' im Querschnitt stetig und endlich ist und am Rande des Querschnittes entweder mit der Tangente der Umrißlinie zusammenfällt oder gleich null ist.

Trägt man in jedem Punkte die Richtung der Hauptschubspannungen ein, so erhält man im Querschnitte die Schar der Hauptschubspannungslinien mit der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}'}{\tau_{xz}'} = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}} \quad \text{. . . . . (21).}$$

Die Funktion $\Phi(x, y) = C$ stellt die Schar der senkrechten Querlinien (orthogonalen Trajektorien) dar.

Die Verwölbung des Querschnittes wird nach Gl. (17) und (19) $\zeta = G\Phi$; sie ist folglich ebenfalls durch die Funktion Φ gegeben. Für jeden Wert von Φ erhält man Punkte gleicher Längsverschiebung. Man kann den Querschnitt und den Balken nach den Schubspannungslinien in voneinander unabhängige Teile zerlegen, ohne den Spannungszustand zu stören, da zwischen denselben keine Kraftübertragung stattfand. Der Schwerpunkt der Teile liegt auf der gemeinsamen Nullinie; die Schar der Hauptschubspannungs-

linien beginnt folglich an der Begrenzungslinie oberhalb der Nullinie, zerlegt den Querschnitt in schmale Streifen und endet unterhalb der Nullinie. Die Begrenzungslinie wird durch zwei oder mehrere Schubspannungslinien gebildet.

5. Einfluß der Querzusammenziehung. Die Querzusammenziehung in der y-Richtung ruft eine verschieden starke Verzerrung der Querschnitte, Abb. 9, hervor, wodurch eine weitere Verkrümmung der senkrechten Querfasern in der z-Richtung entsteht. Es wird

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{m}\,\sigma_0'\,\frac{y}{E}\,, \qquad \zeta = \frac{1}{m}\,\sigma_0'\,\frac{y^3}{6\,E}\,.$$

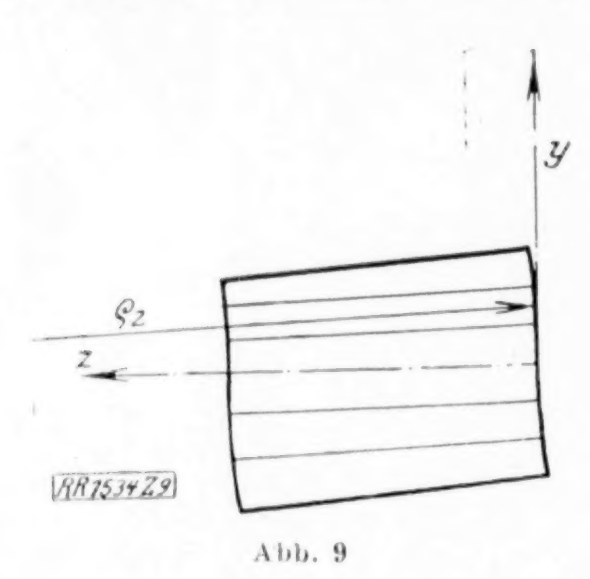


Abb. 9

Diese gleiche Verwölbung aller Querschnitte entspricht ohne weiteres der Bedingung des inneren Zusammenhanges.

Die Querzusammenziehung in x-Richtung ruft ebenfalls eine Verzerrung und eine Verwölbung des Querschnittes hervor. Zur Aufrechterhaltung des inneren Zusammenhanges treten hierbei Schiebungen γ_{xz}'' und γ_{yz}'' und die Zusatzschubspannungen τ_{xz}'' und τ_{yz}'' auf, deren Verteilung (nach **3**) in allen Querschnitten dieselbe ist. Der Nullquerschnitt bleibt unverzerrt; der Querschnitt

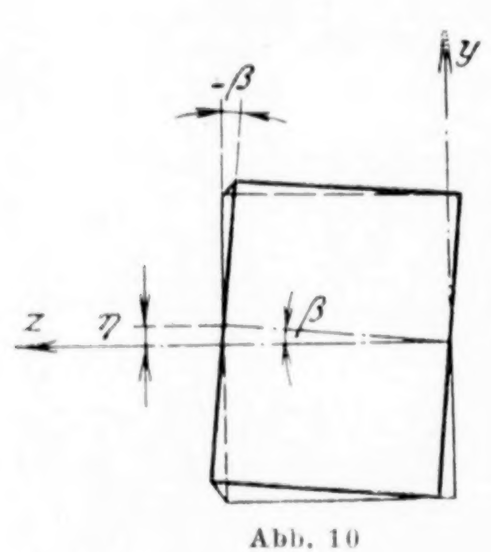


Abb. 10

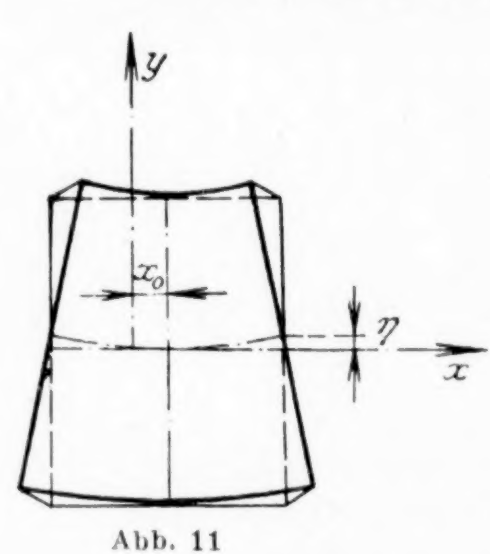


Abb. 11

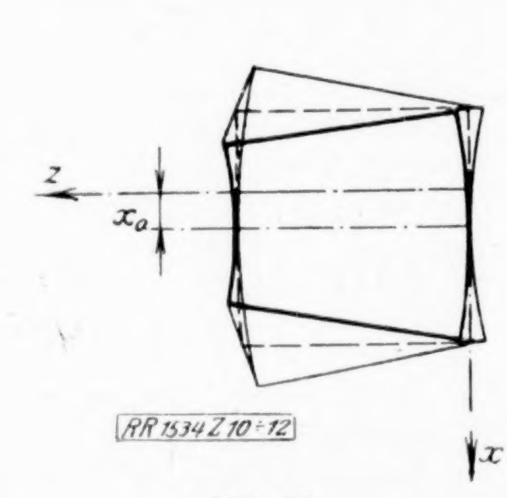


Abb. 12

durch z ändert sich nach Abb. 11 (Seitenansicht). Ein senkrechter Längsschnitt durch $x = x_0$ bleibt eben. Die z-Achse ist parallel zu dessen Längsfasern gelegt. Die anderen senkrechten Längsschnitte verwinden sich zu Schraubenflächen mit dem veränderlichen Verdrehungswinkel

$$\vartheta = -\frac{1}{m}\,\sigma_0'\,\frac{x - x_0}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Die wagerechten Querfasern krümmen sich:

$$\eta = \frac{(x - x_0)^2}{2}\,\frac{1}{m}\,\sigma_0'\,\frac{z}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Die Längsfasern durch x erhalten hierdurch gegen die z-Achse, Abb. 10 (Aufriß), die Neigung

$$\beta = \frac{\eta}{z} = \frac{(x - x_0)^2}{2}\,\frac{1}{m}\,\sigma_0'\,\frac{1}{E}\,.$$

Die senkrechten Querfasern neigen sich zur y-Achse um den Winkel $-\beta$; hierdurch entstehen die Längsverschiebungen ζ. Bei Berücksichtigung der Schiebung $\gamma_{yz}'' = \frac{\tau_{yz}''}{G}$ (die in der Abbildung nicht zum Ausdruck gebracht ist), erhält man

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}''}{G} - \frac{(x - x_0)^2}{2}\cdot\frac{1}{m}\,\sigma_0'\,\frac{1}{E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

Andererseits wird infolge derselben Querzusammenziehung die wagerechte Querfaser nach Abb. 12 (Grundriß) verkrümmt.

Bei Berücksichtigung der Schiebung $\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}''}{G}$ erhält man

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}''}{G} + (x - x_0)\,y\cdot\frac{1}{m}\,\sigma_0'\,\frac{1}{E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

Aus Gl. (24) und (25) folgt durch Entfernung von ζ die Gleichung des inneren Zusammenhanges

$$\frac{\partial \tau_{xz}''}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}''}{\partial x} = -\frac{1}{m+1}\sigma_0'(x - x_0) = 2\,G\,\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Die Gleichung des inneren Gleichgewichtes lautet

$$\frac{\partial \tau_{xz}''}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}''}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Die Lösung der Differentialgleichungen (26) und (27) ist

$$\tau_{xz}'' = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz}'' = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Hierdurch wird Gl. (27) erfüllt. In Gl. (26) eingesetzt, erhält man

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{m+1}\sigma_0'(x - x_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\Psi = \Re f_2(x + iy) + \frac{1}{m+1}\cdot {}^1/_6 \cdot \sigma_0' x^3 + \left[\Re f_3(x+iy) - \frac{1}{m+1}\sigma_0' \frac{x^2+y^2}{4}\right] x_0 \quad (30),$$

woraus die Spannungen nach Gl. (28) zu finden sind.

Die Funktionen f_2 und f_3 sind so zu wählen, daß am Rande die resultierende Schubspannung mit der Tangente der Umrißlinie zusammenfällt. Die Längsverschiebung wird nach Gl. (24) und (25)

$$\zeta = \frac{1}{G}\left\{J f_2(x + ip) + x_0\, J f_3(x + ip) + \frac{y\,(x^2 - x_0^2)}{4\,(m+1)}\sigma_0'\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (31),$$

und muß innerhalb des Querschnittes stetig und eindeutig sein.

Je nach der Wahl von x_0 erhält man verschiedene Lösungen für Ψ, τ_{xz}'' und τ_{yz}''. Durch diese Spannungen wird keine Querkraft übertragen; es wird jedoch ein drehendes Moment je nach der Größe von x_0 auftreten. Für einen bestimmten Wert von x_0 erhält man die normale Lösung der Zusatzschubspannungen, für die das Drehmoment gleich null wird. Bei zur Querkraft symmetrischen Querschnitten fällt dann der ebenbleibende Längsschnitt mit der Symmetrieebene zusammen; auch bei anderen Querschnitten liegt er innerhalb des Balkens. Die anderen Längsschnitte verwinden sich in geringem Maße verhältnisgleich mit dem Abstande $(x - x_0)$. Durch Ueberlagerung einer reinen Drehung erhält man einen anderen ebenbleibenden Längsschnitt.

Zeichnet man in jedem Querschnittspunkte die Richtung der Zusatzschubspannung auf, so erhält man die Kurvenschar der Zusatzschubspannungen mit der Gleichung

$$\Psi(x, y) = C \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Trägt man über jedem Punkte des Querschnittes, Abb. 13 und 14, den Wert Ψ ab, so entsteht die Spannungsfläche Ψ. Die Höhenschnitte geben im Grundrisse die Spannungslinien. Zwischen zwei benachbarten Spannungslinien Ψ und $\Psi + d\Psi$ entsteht ein Streifen von der veränderlichen Breite dn. Man erhält unter Berücksichtigung der Gl. (28):

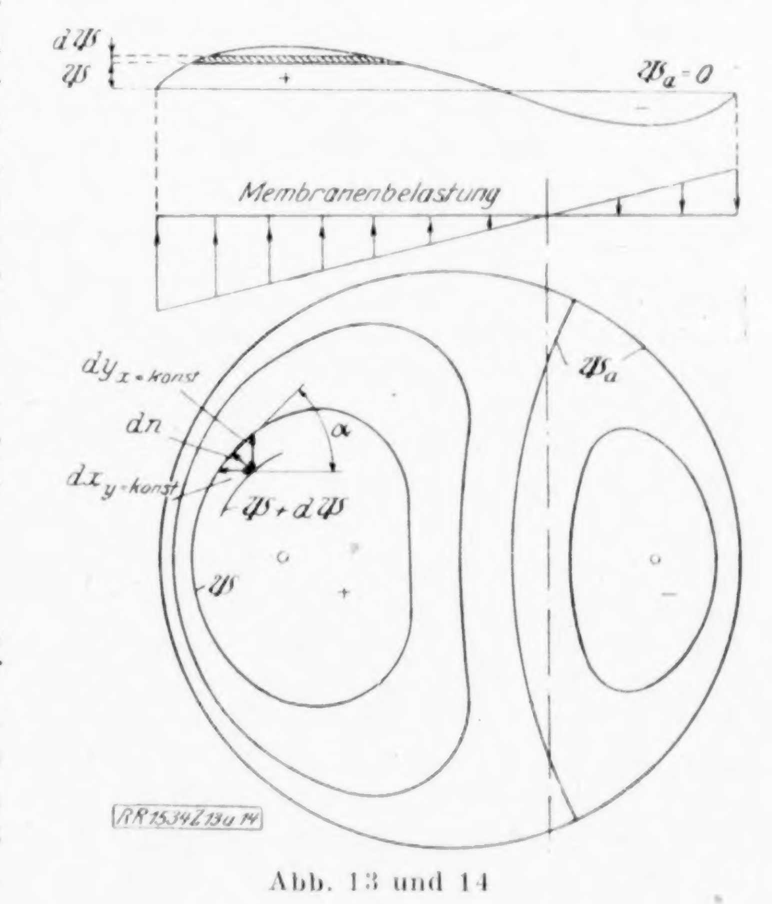


Abb. 13 und 14

$$d\Psi = \tau'' dn = \tau_{yz}'' dx_{y\text{-konst}} = -\tau_{xz}'' dy_{x\text{-konst}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Die Spannungen lassen sich folglich aus der Neigung der Spannungsfläche bestimmen. Zwischen zwei Balkenquerschnitten im Abstande 1 wirkt auf die Fläche dn 1 die Längsschubkraft $\tau\, dn = d\Psi$. Da keine äußeren Kräfte angreifen, so können die Spannungslinien nicht an der Umrißlinie enden. Sie müssen folglich in sich geschlossen

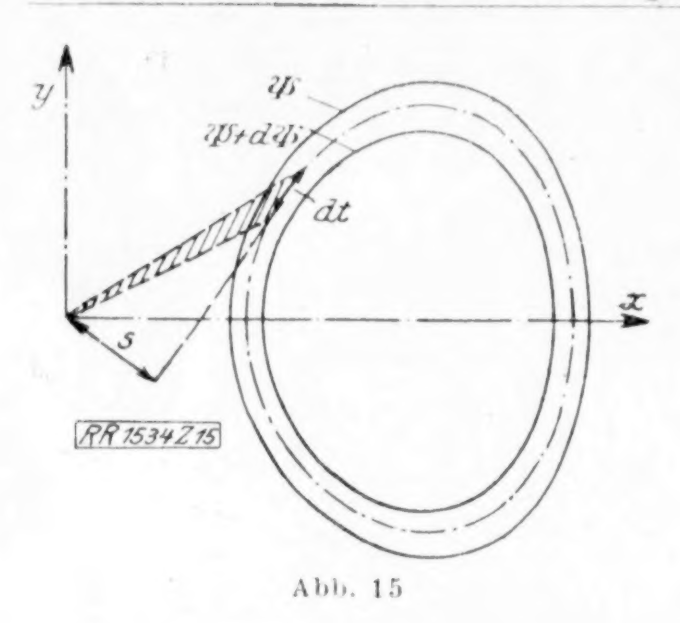


Abb. 15

sein und liegen ineinander geschachtelt oder nebeneinander. Für $\Psi = \Psi_a$ erhält man die äußere Umrißlinie; die Funktion sei so gewählt, daß $\Psi_a = 0$ wird.

Durch jeden geschlossenen Streifen zwischen Ψ und $\Psi + d\Psi$ wird nach Abb. 15 das Drehmoment

$$dM = \int_{(\Psi)} d\Psi\, s\, dt = 2\, F_\Psi\, d\Psi \quad (34)$$

übertragen. Das ganze Moment ist folglich durch den doppelten Rauminhalt unter der Spannungsfläche Ψ gegeben. Da für die normale Lösung das Moment gleich null ist, so liegt ein Teil der Spannungsfläche unterhalb, ein Teil oberhalb der Ebene $\Psi_a = 0$. Man erhält für $\Psi_a = 0$ außer der Umrißlinie eine weitere Linie im Querschnitt.

Die Spannungsfunktion entspricht in ihren Eigenschaften der bekannten Spannungsfunktion für reine Drehung. Auch das Prandtlsche Membranengleichnis läßt sich hierfür anwenden:

Schneidet man in einer starren Platte eine Oeffnung von der Form des Querschnittes aus und spannt hierüber eine in allen Richtungen gleichmäßig gezogene Membrane (z. B. Seifenhaut), so erhält man bei gleichmäßigem Druck auf die Membrane ($p = -G\vartheta =$ konstant) die Spannungsfläche für reine Drehung (bis auf einen unveränderlichen Beiwert). Aus der Spannungsfläche lassen sich in gleicher Weise, wie für die Zusatzschubspannungen ausgeführt ist, die Spannungen für reine Drehung und das Drehmoment finden. Ist der Druck

$$p = -G\vartheta = \frac{x - x_0}{2\,(m+1)} \cdot \sigma_0' \quad \text{[vergl. Gl. (22)]},$$

wächst er also verhältnisgleich dem Abstande vom ebenbleibenden Längsschnitte, Abb. 13, sodaß er einerseits von diesem positiv, andererseits negativ wird, so erhält man die Spannungsfläche der Zusatzschubspannungen (bis auf den gleichen Beiwert). Da für die normale Lösung die Spannungsfläche z. T. oberhalb, z. T. unterhalb der Ebene $\Psi_a = 0$ liegt, so muß positiver und negativer Druck auf die Membrane wirken. Der ebenbleibende Längsschnitt liegt folglich innerhalb des Balkens.

6. Zusammenfassung der Spannungen und Formänderungen. Durch Ueberlagerung der getrennt gefundenen Spannungen erhält man den bekannten gesamten Spannungszustand der Biegung durch eine Querkraft. Durch die Trennung der Haupt- und Zusatzschubspannungen wird die Entstehung und Bedeutung klarer. Es lassen sich hierdurch auch auf einfachem Wege Näherungslösungen finden.

Die senkrechten Längsschnitte bleiben infolge der Hauptschubspannungen eben. Die Lage der Querkraft ist durch dieselben eindeutig bei gegebenem Querschnitt und gegebener Nullinie bestimmt. Infolge der Querzusammenziehung und der Zusatzschubspannungen bleibt ein senkrechter Längsschnitt eben, während sich die anderen zu Schraubenflächen verwinden. Nimmt man die normale Lösung der Zusatzschubspannungen, so bleibt die Lage der Querkraft unverändert und der ebenbleibende Längsschnitt liegt innerhalb des Balkens. Dieser Spannungszustand werde als Biegung durch eine Querkraft ohne Drehung bezeichnet. (Dieser Begriff lag bis jetzt für den allgemeinen Querschnitt nicht fest.)

Fällt die Nullinie in Richtung der x-Achse, so erhält man eine durch die Hauptschubspannungen bestimmte Lage der Querkraft. Wird die y-Achse zur Nullinie, so erhält man eine neue andere Lage der Querkraft. Der Schnittpunkt dieser Querkräfte gibt den Querkraftmittelpunkt des Querschnittes T, durch den jede Querkraft geht, die eine Biegung ohne Drehung hervorruft. Bei zwei- und mehrfachsymmetrischen Querschnitten fällt dieser Punkt mit dem Schwerpunkt zusammen. Bei einfachsymmetrischen und unsymmetrischen Querschnitten kann ein nicht zu vernachlässigender Abstand zwischen beiden Punkten bestehen. Der Querkraftmittelpunkt kann sogar ganz außerhalb des Querschnittes liegen. Die Kenntnis der Lage des Querkraftmittelpunktes ist von großer Bedeutung, um bei Belastung des Balkens eine Drehung desselben zu vermeiden.

7. Genaue Lösungen für die Schubspannungen. Für einige einfache Querschnitte werden die Funktionen Φ und Ψ gebracht und beachtenswerte Eigenschaften der Schubspannungen hervorgehoben.

Rechteck $2a \cdot 2b$:

$$\Phi = {}^1/_2\, \sigma_0' \left(-{}^1/_3\, y^3 + b^2 y\right) \quad . \quad . \quad . \quad (35),$$

$$\Psi = \frac{1}{2(m+1)}\sigma_0' \left[{}^1/_3\, x^3 - \frac{a^2}{3} x - \sum_{k=1,2,3} (-1)^k \cdot \frac{4a^3}{\pi^3 k^3} \cdot \sin k \frac{\pi x}{a} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\, k \frac{\pi y}{a}}{\mathfrak{Cof}\, k \frac{\pi b}{a}}\right] \quad (36)$$

oder

$$\Psi = \frac{1}{2(m+1)}\sigma_0' \left[x y^2 - b^2 x + \sum_{k=1,3,5} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \frac{32\, a b^2}{\pi^3 k^3} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\, k \frac{\pi x}{2b}}{\mathfrak{Sin}\, k \frac{\pi a}{2b}} \cdot \cos k \frac{\pi y}{2b}\right] \quad (37).$$

Für die Hauptschubspannungen τ' erhält man die bekannte parabolische Verteilung mit dem Höchstwerte ${}^3/_2 \cdot \frac{Q}{F}$ in der Nullinie. Die Hauptschubspannungslinien sind parallele Gerade. Die Zusatzschubspannungslinien sind in Abb. 16 dargestellt. Durch die Zusatzschubspannung wird die Hauptschubspannung in der Mitte verringert, an den Enden der Nullinie vergrößert. Außerdem kann bei breiten Querschnitten am Ober- und Unterrande eine noch höhere Spannung auftreten, für die sich angenähert der Wert

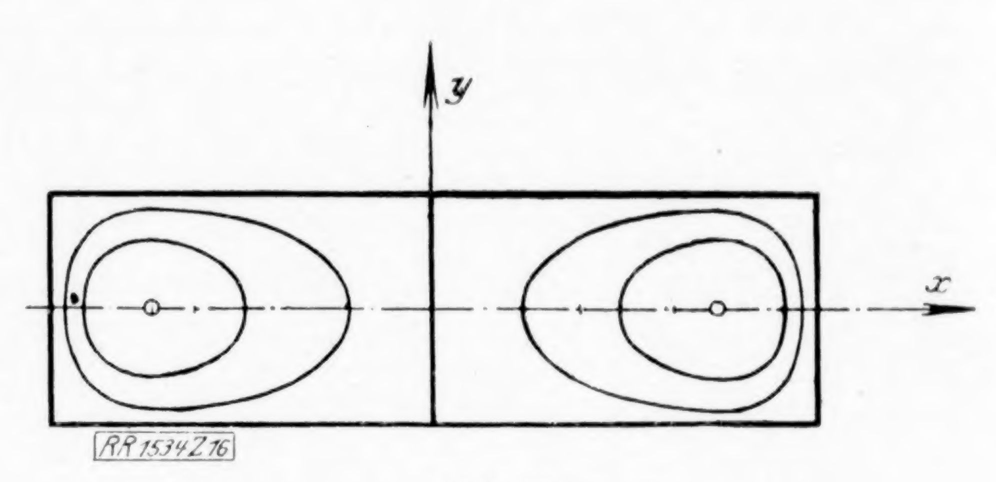


Abb. 16

$$\tau_{xz\,max}'' \sim \pm \frac{1}{m+1}\sigma_0' a b \left[1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{b}{a}\left(ln \frac{4}{\pi} \cdot \frac{a}{b} + 1\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

ergibt. Man erhält mit $m = {}^{10}/_3$ für verschiedene Seitenverhältnisse folgende Schubspannungen, bezogen auf die größte Hauptschubspannung ${}^3/_2\, \frac{Q}{F}$:

a/b	0,25	0,5	1	2	4	8	16
In der Mitte des Querschnittes $\frac{\tau_{yz}' + \tau_{yz}''}{\tau_{yz\,max}'}$.	0,995	0,981	0,931	0,834	0,775	0,769	0,769
In der Mitte der senkrechten Seiten $\frac{\tau_{yz}' + \tau_{yz}''}{\tau_{yz\,max}'}$	1,010	1,038	1,146	1,455	2,14	3,52	6,26
Am Oberrande $\frac{\tau_{xz\,max}''}{\tau_{yz\,max}'}$	—	—	—	—	0,63	2,16	5,54

Bedingung ist natürlich, daß die Formänderung der Querzusammenziehung auch eintreten kann.

Rechteck mit schräggerichteter Querkraft. Die Querkraft ist in Richtung der Rechteckseiten zu zerlegen; für die Teilkräfte sind Haupt- und Zusatzschubspannungen zu finden. In der Mitte des Querschnittes tritt die größte Hauptschubspannung $\tau_{max}' = {}^3/_2\, \frac{Q}{F}$ auf. Infolge der Nebenschubspannungen kann in einem anderen Punkte eine höhere Spannung auftreten.

Uebereckstehendes Quadrat, Abb. 17.

$$\Phi = {}^1/_2\, \sigma_0' \left[-{}^1/_3\, y^3 + a^2 y - {}^1/_6\,(3\,x^2 y - y^3) \right] \quad \ldots \ldots (39),$$

Gleichung der Schublinien: $$y^2 - x^2 - 2\,a^2 - c\,x^2 = 0 \quad \ldots \ldots (40),$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi = \frac{1}{2\,(m+1)}\,\sigma_0' \Bigg[& {}^1/_3\, x^3 + {}^1/_6\,(x^3 - 3\,x\,y^2) - x\,a^2 \\ & - \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1,3,5} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{32\,a^3}{\pi^3 k^3} \frac{\mathfrak{Sin}\,k\,\frac{\pi\,(x+y)}{2\sqrt{2}\,a} \cos k\,\frac{\pi\,(x-y)}{2\sqrt{2}\,a} + \mathfrak{Sin}\,k\,\frac{\pi\,(x-y)}{2\sqrt{2}\,a} \cos k\,\frac{\pi\,(x+y)}{2\sqrt{2}\,a}}{\mathfrak{Sin}\,k\,\frac{\pi}{2}} \Bigg] \end{aligned}\right\} (41).$$

Gleichseitig-rechtwinkliges Dreieck. Geht die Querkraft in Richtung der Hypothenuse, Abb. 18, so ist die Lösung für die Hauptschubspannungen dieselbe wie für das Quadrat über Eck. Für die Querkraft senkrecht zur Hypothenuse wird

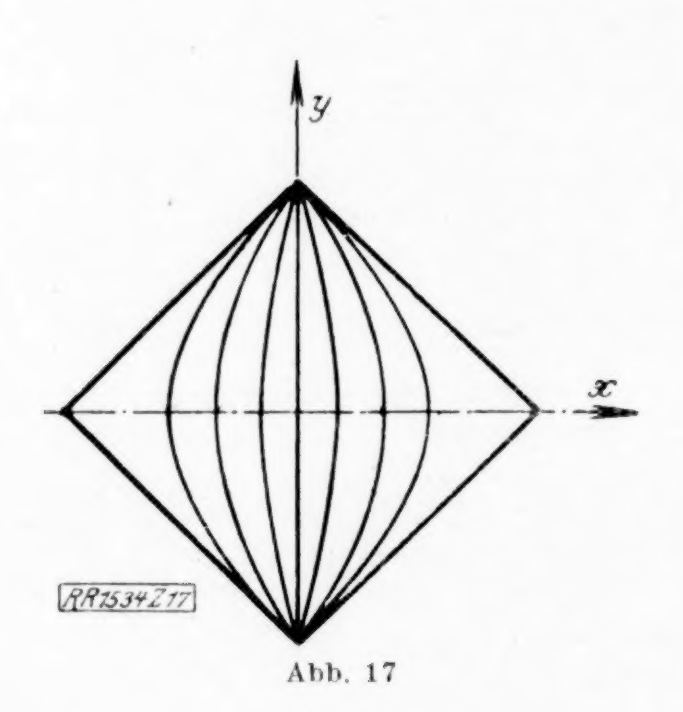


Abb. 17

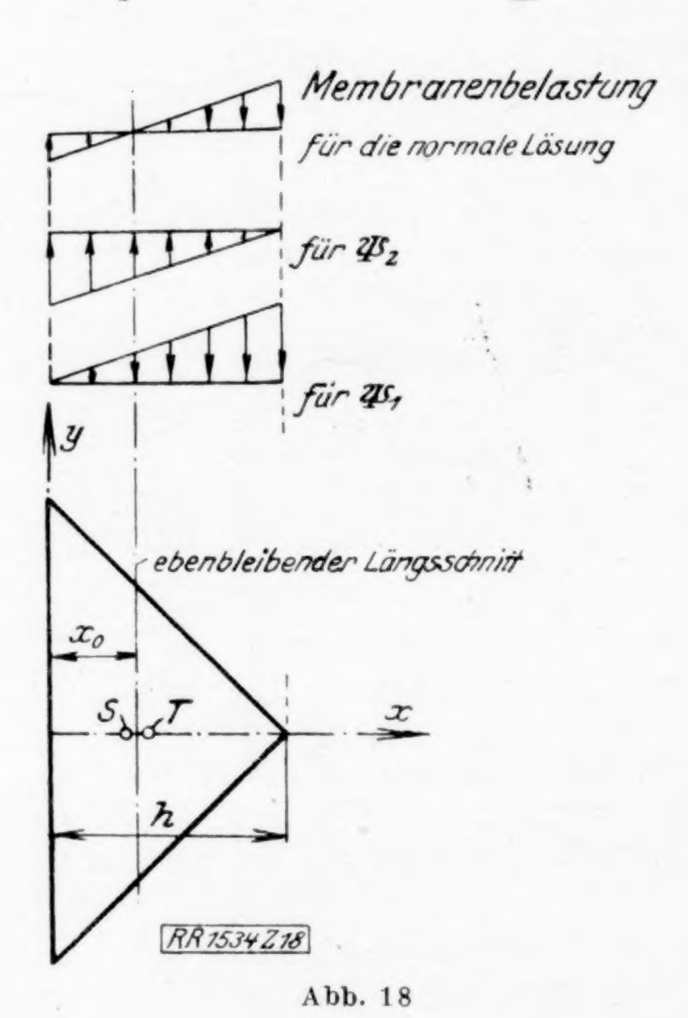


Abb. 18

$$\left.\begin{aligned} \Phi = {}^1/_2\, \sigma_0' \Big[& -{}^1/_3\, y^3 + \frac{1}{24\,h}\,(x^4 + 6\,x^2 y^2 + y^4) \\ & - {}^1/_{18}\,(3\,x^2 y - y^3) - {}^1/_9\, h\,(x^2 - y^2) + {}^{14}/_{81}\, h^2 y \Big] \end{aligned}\right\} (42).$$

Die Lösung für die Zusatzschubspannungen des Quadrats über Eck kann ebenfalls als eine Lösung für das gleichseitig rechtwinklige Dreieck aufgefaßt werden. Die Lösung stellt jedoch **nicht** die normale Lösung dar, die Membranenbelastung wächst mit der Entfernung von der Hypothenuse (s. Ψ_1 in Abb. 18). Das Moment wird

$$M_1 = 2 \int_{x=0}^{h=x} \int_{y=-(h-x)}^{y=h-x} \Psi_1\, dy\, dx = -\,0{,}01927\,\frac{\sigma_0'\,h^5}{m+1} \quad \ldots \ldots (43).$$

Eine andere Lösung erhält man, wenn der ebenbleibende Längsschnitt durch die rechtwinklige Spitze des Dreiecks geht; die Spannungsfunktion für das Koordinatensystem durch diesen Punkt lautet:

$$\Psi_2 = \frac{1}{2\,(m+1)}\,\sigma_0' \left[{}^1/_3\, x^3 + {}^1/_6\,(x^3 - 3\,x\,y^2) + {}^1/_2\,(x^2 - y^2) \right] \quad \ldots (44)$$

oder für das Koordinatensystem nach Abb. 18

$$\Psi_2 = \frac{1}{2\,(m+1)}\,\sigma_0' \cdot {}^1/_2\, x\,(x - h + y)\,(x - h - y) \quad \ldots \ldots (45).$$

Das Moment wird
$$M_2 = 0{,}0333 \ldots \frac{\sigma_0'}{m+1} h^5 \quad \ldots \ldots \quad (46).$$

Die normale Lösung ergibt sich durch Ueberlagerung zu
$$\Psi \sim 0{,}634\, \Psi_1 + 0{,}366\, \Psi_2 \quad \ldots \ldots \quad (47).$$

(Auch eine bisher nicht bekannte Lösung für reine Drehung läßt sich au $\Psi_1 - \Psi_2$ ableiten.)

Geht die Kraft senkrecht zur Hypothenuse, so wird
$$\Psi = \frac{1}{2(m+1)} \sigma_0' \left[{}^1/_3\, x^3 + \frac{1}{2h}(x^3 y - x y^3) - {}^1/_6\,(x^3\, 3\, x y^2) - {}^2/_{27}\, x h^2 \right] \quad (48).$$

Kreis:
$$\Phi = {}^1/_2\, \sigma_0' \left[- {}^1/_3\, y^3 + {}^3/_4\, r_a^2 y - {}^1/_{12}\,(3 x^2 y - y^3) \right] \quad \ldots \quad (49),$$
$$\Psi = \frac{1}{2(m+1)} \sigma_0' \left[{}^1/_3\, x^3 - {}^1/_{12}\,(x^3 - 3 x y^2) - {}^1/_4\, r_a^2 x \right] \quad \ldots \quad (50).$$

Die Schubspannungen in der Nullinie sind
$$\tau_{yz}' = {}^1/_8\, \sigma_0' (3 r_a^2 - x^2) = \frac{Q}{2F}\left(3 - \frac{x^2}{r_a^2}\right),$$
$$\text{für } x = 0 \ \ldots \tau_{yz}' = {}^3/_2 \cdot \frac{Q}{F}, \qquad \text{für } x = r_a \ldots \tau_{yz}' = \frac{Q}{F},$$
$$\tau_{yz}'' = {}^1/_8\, \frac{\sigma_0'}{m+1}(- r_a^2 + 3 x^2).$$

Bei Berücksichtigung der Zusatzschubspannungen wird mit $m = {}^{10}/_3$
$$\text{für } x = 0 \ldots \tau_{yz} = 1{,}385 \frac{Q}{F}, \qquad \text{für } x = r_a \ldots \tau_{yz} = 1{,}230 \frac{Q}{F}.$$

Ellipse mit den Achsen $2a$ und $2b$:
$$\Phi = {}^1/_2 \cdot \frac{1}{3 + \frac{a^2}{b^2}} \cdot \sigma_0' \left[\left(2 + \frac{a^2}{b^2}\right)(b^2 y - {}^1/_3\, y^3) - x^2 y \right] \quad \ldots \quad (51).$$
$$\Psi = \frac{1}{2(m+1)} \cdot \frac{1}{3 + \frac{a^2}{b^2}} \cdot \sigma_0' \left[x^3 + \frac{a^2}{b^2} y^2 x - a^2 x \right] \quad \ldots \ldots \quad (52).$$

In der Nullinie erhält man die Schubspannungen mit $\sigma_0' = \frac{4\,Q}{F b^2}$
$$\tau_{yz}' = {}^1/_2\, \frac{1}{3 + \frac{a^2}{b^2}} \cdot \sigma_0' (2 b^2 + a^2 - x^2), \qquad \tau_{yz}'' = \frac{1}{2(m+1)} \frac{1}{3 + \frac{a^2}{b^2}} \cdot \sigma_0' (- a^2 + 3 x^2).$$

Bei breiten Ellipsen tritt die größte Schubspannung an einem Randpunkte auf und ist
$$\tau_{\text{Rand max}} = \frac{Q}{F} \cdot \frac{2}{m+1} \frac{m + 1 + \frac{a^2}{b^2}}{3 + \frac{a^2}{b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}} \cdot \frac{a^2}{b^2} \quad \ldots \ldots \quad (53).$$

Für verschiedene Achsenverhältnisse erhält man mit $m = {}^{10}/_3$:

a/b	0	0,5	1	2	4	8	∞
$\tau_{\text{Mitte}}' : \frac{Q}{F}\ (x = 0,\ y = 0)$	1,33	1,38	1,50	1,72	1,90	1,97	2,0
$\tau_{\text{Ende}}' : \frac{Q}{F}\ (x = a,\ y = 0)$	1,33	1,23	1,00	0,57	0,21	0,06	0
$\tau_{\text{Mitte}} : \frac{Q}{F}\ (x = 0,\ y = 0)$	1,33	1,35	1,38	1,45	1,50	1,53	1,54
$\tau_{\text{Ende}} : \frac{Q}{F}\ (x = a,\ y = 0)$	1,33	1,30	1,27	1,10	1,00	0,94	0,92
$\tau_{\text{Rand max}} : \frac{Q}{F}$	—	—	—	1,27	2,04	3,70	∞

Kreisring mit den Halbmesser r_a und r_i:

$$\Phi = {}^1/_2\, \sigma_0' \left[-{}^1/_3\, y^3 - {}^1/_{12} (3\,x^2 y - y^3) + {}^3/_4 (r_a^2 + r_i^2)\, y + {}^3/_4\, r_a^2 r_i^2 \frac{y}{x^2 + y^2} \right] \quad . \quad . \quad (54),$$

$$\Psi = \frac{1}{2\,(m+1)}\, \sigma_0' \left[{}^1/_3\, x^3 - {}^1/_{12} (x^3 - 3\,x\,y^2) - {}^1/_4 (r_a^2 + r_i^2)\, x + {}^1/_4\, r_a^2 r_i^2 \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \quad (55).$$

In der Nullinie wird

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz}' &= {}^1/_8\, \sigma_0' \left[-x^2 + 3\,(r_a^2 + r_i^2) + \frac{3\, r_a^2 r_i^2}{x^2} \right] \\ \tau_{yz}'' &= \frac{1}{8\,(m+1)}\, \sigma_0' \left[3\,x^2 - (r_a^2 + r_i^2) - \frac{r_a^2 r_i^2}{x^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{mit } \sigma_0' = \frac{4\,Q}{F\,(r_a^2 + r_i^2)},$$

$$\text{für } x = r_i \; \ldots \ldots \; \tau_{yz}' = \frac{3\, r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 + r_i^2} \cdot \frac{Q}{F}, \qquad \tau_{yz}'' = -\frac{1}{m+1} \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a^2 + r_i^2} \frac{Q}{F},$$

$$\text{für } x = r_a \; \ldots \ldots \; \tau_{yz}' = \frac{r_a^2 + 3\, r_i^2}{r_a^2 + r_i^2} \frac{Q}{F}, \qquad \tau_{yz}'' = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a^2 + r_i^2} \cdot \frac{Q}{F}.$$

Für kleine Bohrungen erhält man dieselben Spannungen wie für den vollen Querschnitt; lediglich am Rande der Bohrung tritt eine Verdopplung der örtlichen Spannung auf.

Für den schmalen Kreisring mit $r_a - r_i = s$; $\frac{r_a + r_i}{2} = r_m$ wird

$$\tau_{yz}' = \frac{2\,Q}{F}, \qquad \tau_{yz}'' = \pm \frac{Q}{F} \frac{s}{r_m} \text{ (klein gegenüber } \tau_{yz}').$$

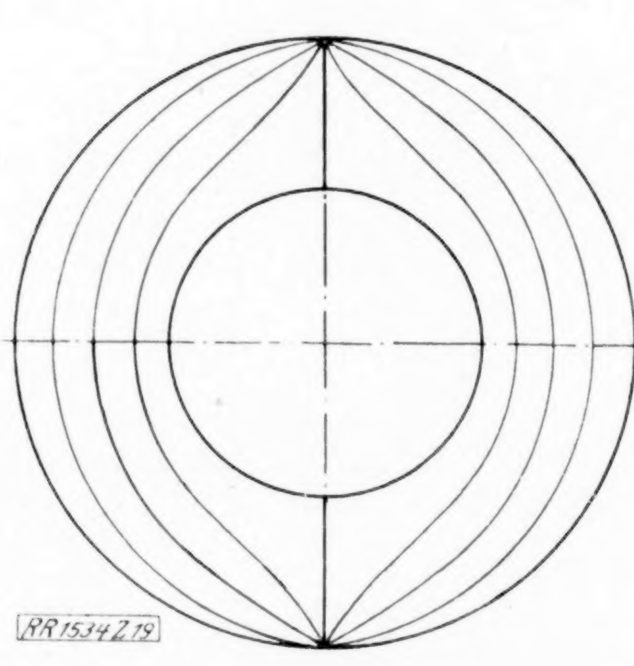


Abb. 19

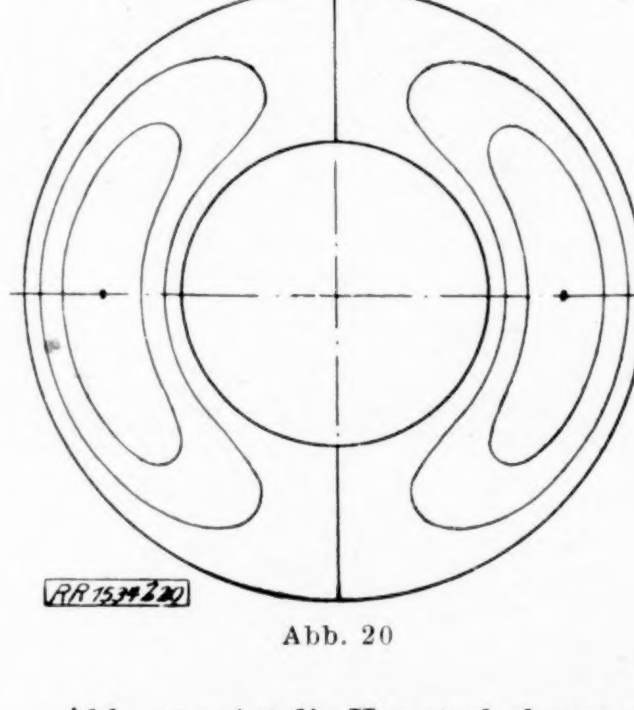


Abb. 20

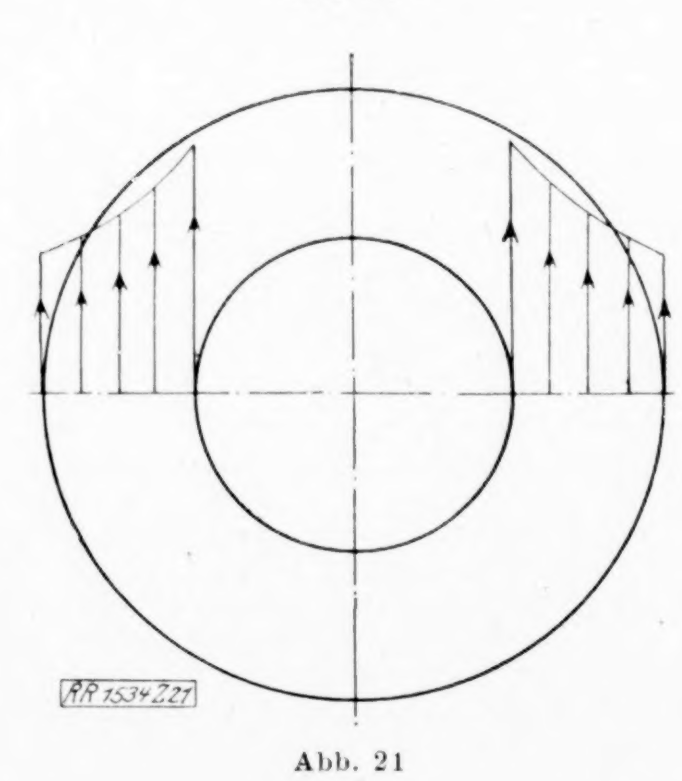


Abb. 21

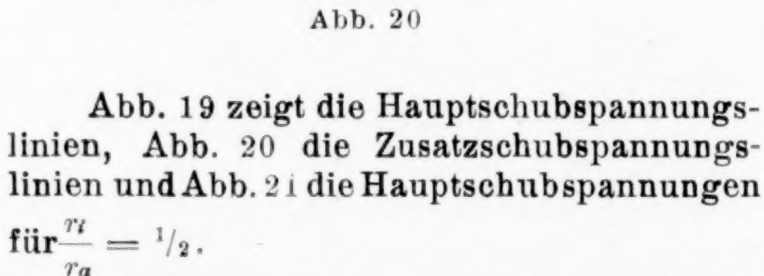


Abb. 19 zeigt die Hauptschubspannungslinien, Abb. 20 die Zusatzschubspannungslinien und Abb. 21 die Hauptschubspannungen für $\frac{r_i}{r_a} = {}^1/_2$.

Die Lösung der Hauptschubspannungen ist zugleich die Lösung für den halben Kreisring. Der Querkraftmittelpunkt hat die Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} x_t &= \frac{8}{\pi} \, \frac{{}^1/_5\, (r_a^5 - r_i^5) + r_a^2 r_i^2 (r_a - r_i)}{r_a^4 - r_i^4}, \\ y_t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (56).$$

Für den schmalen Halbkreisring wird

$$x_t = \frac{4}{\pi}\, r_m > r_m \quad . \quad . \quad (57);$$

die Querkraft geht außerhalb des Querschnittes.

8. Näherungslösungen für die Hauptschubspannungen. Der Querschnitt wird durch nach Gefühl eingezeichnete Hauptschubspannungslinien in schmale Streifen zerlegt, deren Schwerpunkte auf der gemeinsamen Nullinie liegen. In einem solchen Streifen, Abb. 22, tritt in der Mitte der Breitenlinie b die Schubspannung τ' in Richtung der Streifenmittellinie auf. Auf das Balkenstück von der Länge 1 und dem Querschnitt oberhalb der Breitenlinie b wirken auf die Stirnflächen verschieden große Zugkräfte und auf die untere Fläche $b \cdot 1$ die Längsschubkraft $\tau' b$. Aus der Gleichgewichtsbedingung aller in der z-Richtung wirkenden Kräfte folgt für Schubspannung und Verschiebung

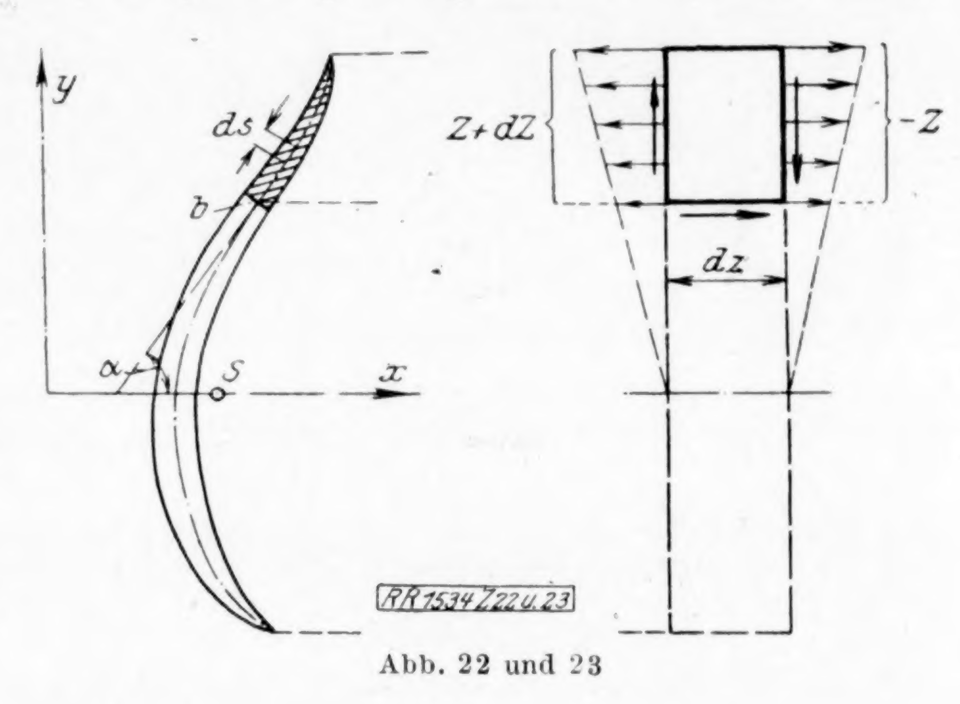


Abb. 22 und 23

$$\tau' = \frac{\sigma_0' \int_y^{y_{max}} y\, df}{b} \quad \ldots \quad (58), \qquad \zeta = -\frac{1}{G}\int_y^{y_{max}} \tau'\, ds \quad . \ . \quad (59),$$

worin ds das Differential der Streifenmittellinie ist.

Der Querschnitt muß nun so zerlegt werden, daß die Punkte der zu den Schublinien senkrechten Querlinien gleiche Längsverschiebung ζ haben.

Abb. 24 zeigt die so gefundenen Hauptspannungslinien des **⊏**-Querschnittes N. Pr. 30. Da für zwei benachbarte Querlinien $d\zeta$ unveränderlich ist, so wird $\tau' ds =$ konstant; hieraus folgt, daß für scharfe Außenecken ($ds = \infty$) die Spannung gleich null, für scharfe Innenecken ($ds = 0$) die Spannung gleich ∞ wird, falls im letzteren Falle in der scharfen Innenecke nicht eine Gabelung der Spannungslinien eintritt.

Abb. 24

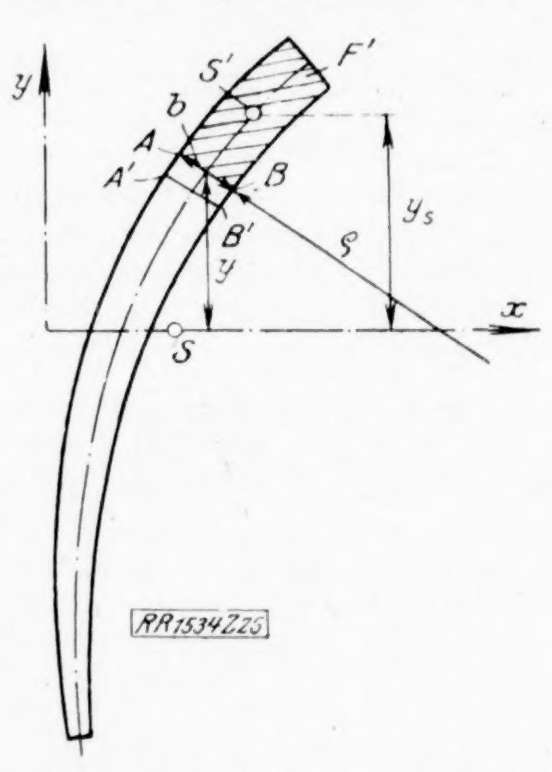
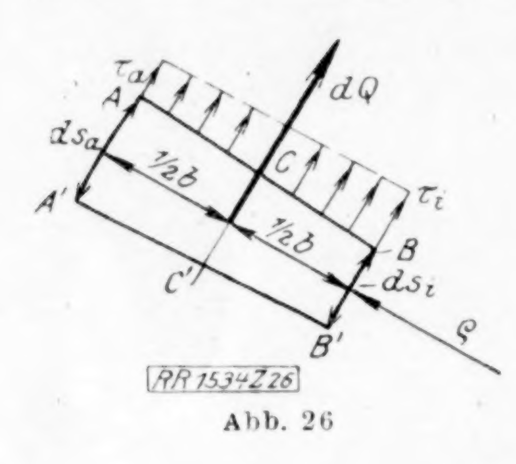


Abb 25

Bei streifenförmigen Querschnitten, Abb. 25, erübrigt sich eine weitere Zerlegung. Die mittlere Schubspannung wird

$$\tau_m' = \sigma_0' \frac{F' y_s'}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60).$$

($F' y_s'$ — statisches Moment der Fläche oberhalb b.)


Abb. 26

Die Randspannungen werden angenähert nach Abb. 26:

$$\tau_i' = \tau_m' \left(1 + \frac{b}{2\varrho}\right), \quad \tau_a' = \tau_m' \left(1 - \frac{b}{2\varrho}\right) \quad . \quad (61).$$

Beispiel 1: Winkelquerschnitt nach Abb. 27:

Statisches Moment der Fläche $A_1 A_0 B_0 B_1 = 28 \text{ cm}^3$

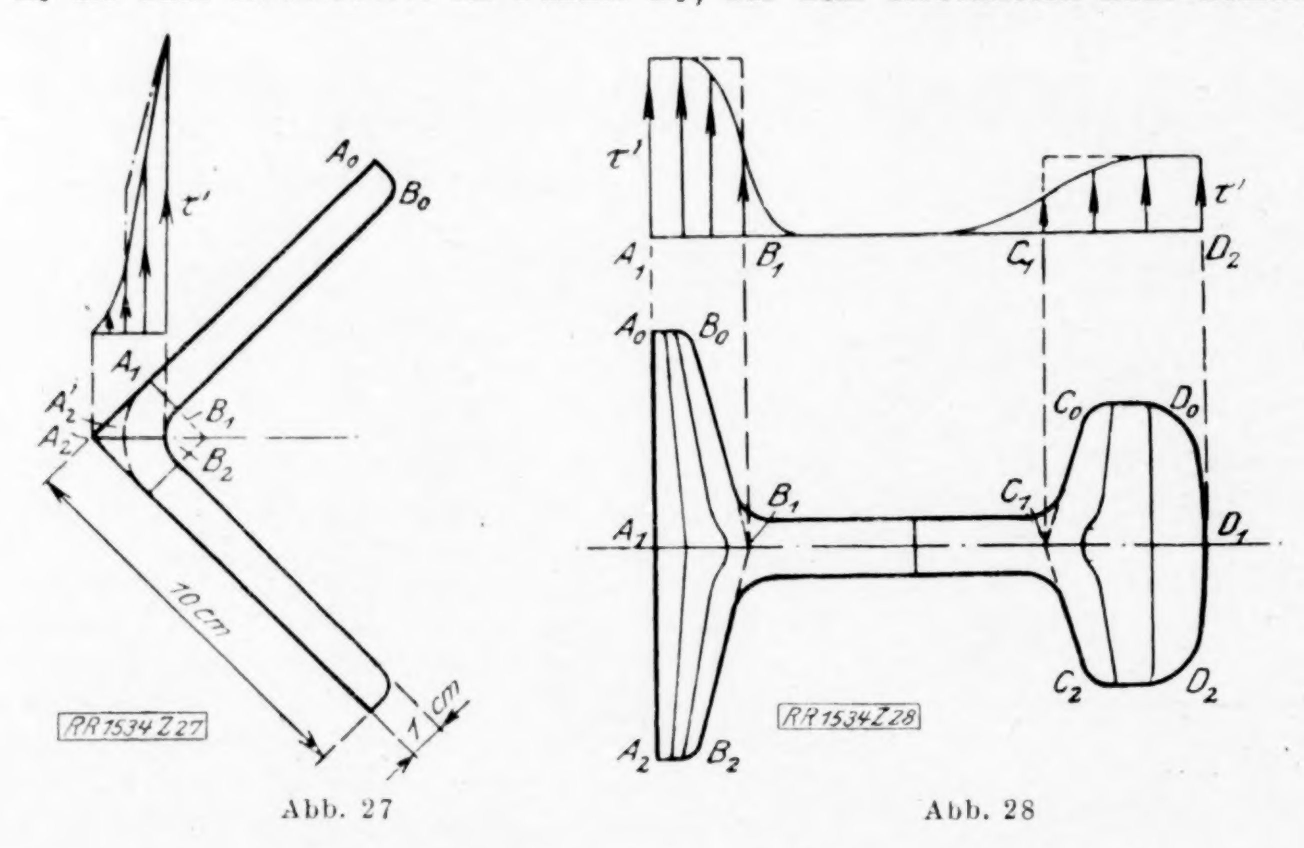
« « « « $A_2 A_1 B_1 B_2 = 1$ «

Spannung in $A_1 B_1$ . . . . . $\tau_m' = {}^{28}/_1 \sigma_0' = 28 \sigma_0'$.

Im Querschnitt ohne scharfe Außenecke wird in der Breitenlinie $A_2' B_2$

$$\tau_m' = {}^{29}/_1 \sigma_0' = 29 \sigma_0', \quad \tau_{B_2}' = 29\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 1{,}5}\right)\sigma_0' = 39 \sigma_0'.$$

Für den Querschnitt mit scharfer Außenecke steigt die Spannung vom Werte Null im Punkte A_2 bis zum Höchstwerte im Punkte B_2, der dem errechneten nahe kommen wird.


Abb. 27 Abb. 28

Beispiel 2: Querliegender Schienenquerschnitt nach Abb. 28:

Die Schubspannungslinien im losgetrennten Kopfe verlaufen angenähert senkrecht zur x Achse, im losgetrennten Fuße bilden sie zur x-Achse zu breiter werdende Streifen. Die Spannungen in $A_1 B_1$ und $C_1 D_1$ sind angenähert gleichmäßig verteilt. Im verbundenen Querschnitte wird der Steg durch eine Schubspannungslinie geteilt. Die nächsten Spannungslinien bilden im Stege lange Vorsprünge. Die Spannungen im Stege werden sehr gering, da die Spannungslinien sehr lang sind. Im Schnitte $A_1 B_1 C_1 D_1$ des ganzen Querschnittes sind fast dieselben Spannungen wie in den losgetrennten Teilen mit Uebergängen in den Punkten B_1 und C_1.

9. Der Querkraftmittelpunkt. Auf die Stirnflächen des Balkenteiles von der Länge dz und dem Querschnitte über der Breitenlinie b, Abb. 25, wirkt in z-Richtung der Ueberschuß der Längskräfte dZ; dieselbe Kraft wirkt in entgegengesetzter Richtung auf die untere Fläche $b\,dz$. In der vorderen Stirnfläche wirkt außerdem die Schubkraft Q' mit den Teilkräften Q_x' und Q_y', in der hinteren Stirnfläche eine gleich große Kraft in entgegengesetzter Richtung. Die Momentengleichung für die x- bezw. y-Achse gibt nach Teilung durch dz:

$$Q_y' = \int_{(F')} \sigma_0' \, y \, df - \tau' \, b \, y = \sigma_0' \, (J_x' - F' \, y_s' \, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62),$$

$$Q_x' = \int_{(F')} \sigma_0' \, x \, df - \tau' \, b \, x = \sigma_0' \, (J_{xy}' - F' \, y_s' \, x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63).$$

Die Integrale gelten für die Querschnittsfläche F' über AB; J_x' und J_{xy}' sind Trägheits- und Zentrifugalmoment, $F' y_s'$ das statische Moment dieser Fläche für die x-Achse.

Bei L- und T-Querschnitten geht die Querkraft mit großer Genauigkeit durch den Schnittpunkt der Mittellinien der Streifenteile, so daß dieser Punkt als Querkraftmittelpunkt T genommen werden kann.

Im U-Querschnitte, Abb. 29, erhält man im Oberflansche die wagerechte Querkraft

$$Q_x' = \sigma_0' \, J_{xy}' \sim \sigma_0' \, \frac{F}{2} \cdot \frac{h_t}{2} \cdot x_s \quad \ldots \ldots \quad (64)$$

und in der oberen Hälfte des Steges die senkrechte Querkraft

$$Q_y = \sigma_0' \, \frac{J_x}{2} ,$$

die zusammen die Querkraft Q' durch den Schnittpunkt der Flansch- und Stegmittellinie geben.

In der unteren Hälfte des Querschnittes erhält man die Querkraft Q'' durch den Schnittpunkt der Mittellinien des Steges und des unteren Flansches.

Der Querkraftmittelpunkt liegt auf der x-Achse außerhalb des Querschnittes im Abstande x_t von der Stegmittellinie. Es wird

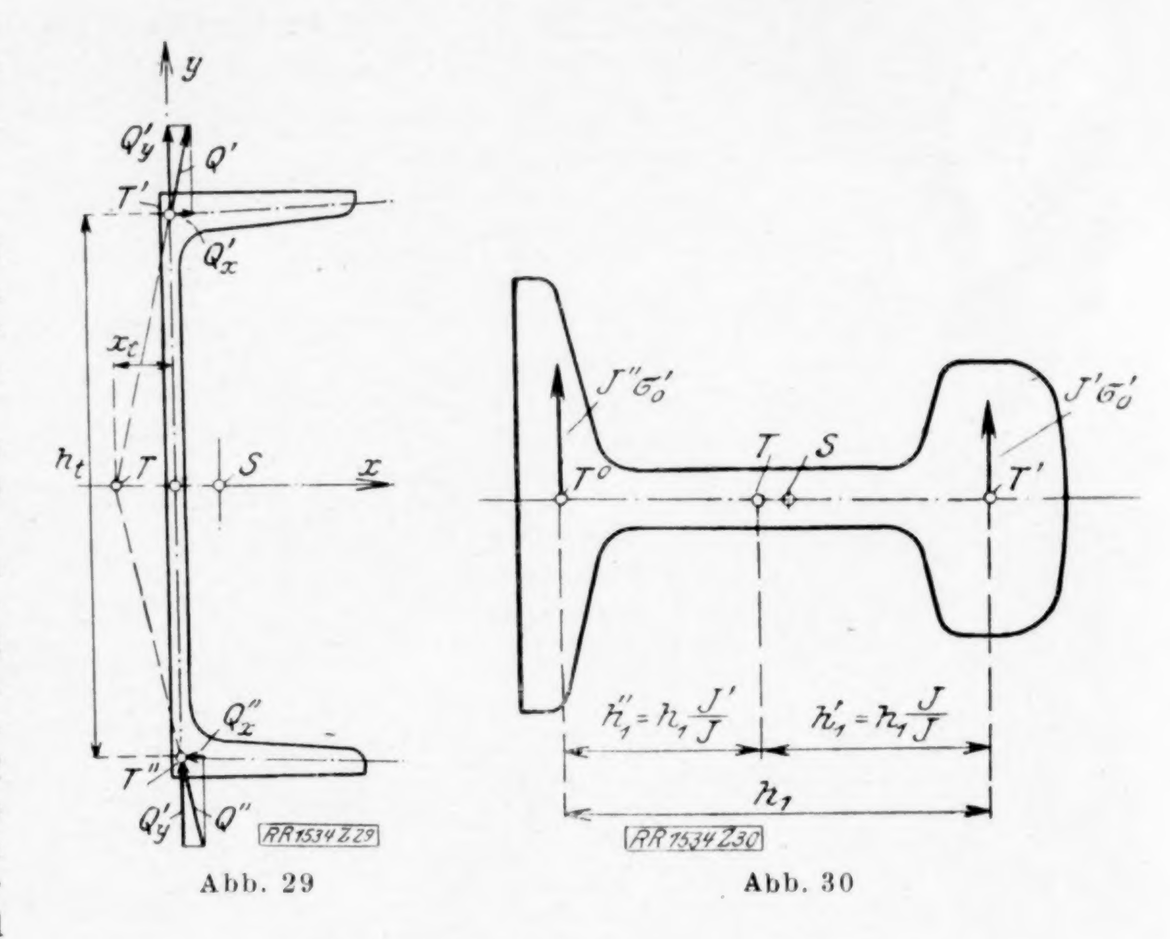


Abb. 29 Abb. 30

$$x_t = -\frac{h_t}{2} \, \frac{Q_x'}{Q_y'} = -\left(\frac{h_t}{2}\right)^2 \frac{F \, x_s}{J_x} \quad \ldots \ldots \quad (65).$$

Für das N. Pr. 30 erhält man beispielsweise

$$x_t = -3{,}2 \text{ cm}.$$

Wird ein solcher Träger in der Stegmittellinie oder gar in der Schwerpunktebene belastet, so tritt eine Verdrehung auf, die unter Umständen mit einer Verbiegung der Flansche verbunden ist [1]).

Beim Schienenquerschnitt, Abb. 30, teilt der Querkraftmittelpunkt die Höhe h_t im umgekehrten Verhältnisse der durch den Kopf und durch den Fuß übertragenen Querkräfte.

10. Näherungslösungen für die Zusatzschubspannungen. Aus den genauen Lösungen ergibt sich, daß die Zusatzschubspannungen nur für in Richtung der Nullinie breite Querschnitte von Bedeutung sind. Für zusammengesetzte Querschnitte ohne Hohlräume, bei denen streifenförmige oder dickere Teile durch weitere Streifen verbunden sind, läßt sich eine Näherungslösung mit Hilfe des Membranengleichnisses finden.

Der Querschnitt nach Abb. 31 (querliegender Schienenquerschnitt N. Pr. 8) ist nach Abb. 32 in folgende Teile zerlegt:

1. Kopf . . . . Rechteck 7,2 cm · 3,6 cm,
2. Steg . . . . » 7,9 cm · 1,4 cm,
3. Fuß . . . . Streifen, 11 cm lang, von abnehmender Breite, in der Mitte 2,3 cm, an den Enden 0,975 cm.

Der gerade bleibende Längsschnitt geht im Abstande x_0 von der Fußlinie. Man erhält für die Mittelpunkte der Teile die Verdrehungen ϑ_1, ϑ_2 und ϑ_3. Der Rauminhalt unter der Membrane über den einzelnen Teilen ist fast derselbe, als ob die ganze Fläche jedes Teiles mit dem mittleren Drucke belastet ist. Man erhält [2])

für Teil 1: $M_1 = 0{,}23 \cdot 7{,}2 \cdot 3{,}6^3 \, G \, \vartheta_1 = 77{,}3 \, G \, \vartheta_1,$

für Teil 2: $M_2 = 0{,}333 \cdot 7{,}9 \cdot 1{,}4^3 \, G \, \vartheta_2 = 7{,}2 \, G \, \vartheta_2,$

für Teil 3: $M_3 = \left[\frac{1}{12} \cdot \frac{11 \, (2{,}3^4 - 0{,}975^4)}{2{,}3 - 0{,}975} - 0{,}21 \cdot 0{,}975^3\right] G \, \vartheta_3 = 18{,}6 \, G \, \vartheta_3.$

[1]) Siehe Dr.-Arbeit des Verfassers, Abschnitt III.

[2]) Man vergl. Forschungsheft 249, Weber: Die Lehre der Drehungsfestigkeit.

Hierin ist nach Gl. (22)
$$G\,\vartheta = -\frac{(x_s - x_0)}{2\,(m+1)}\,\sigma_0'.$$

Für $x_0 = 0{,}65$ cm wird das Moment für den ganzen Querschnitt
$$M = M_1 + M_2 + M_3 = [77{,}3\,(12 - 9{,}65) + 7{,}2\,(6{,}25 - 9{,}65) + 18{,}6\,(1{,}15 - 9{,}65)]\,\frac{\sigma_0'}{2\,(m+1)} \sim 0.$$

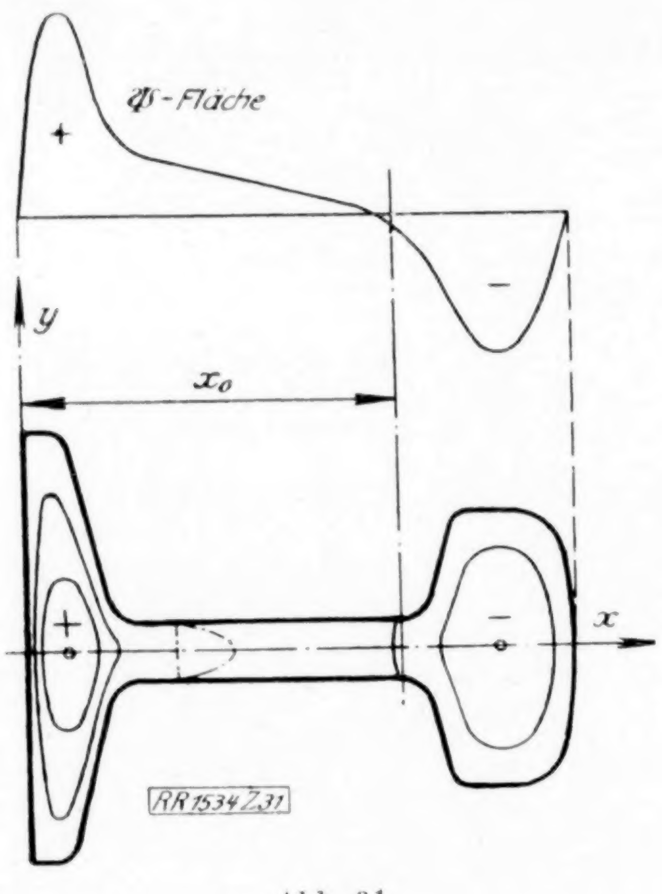


Abb. 31

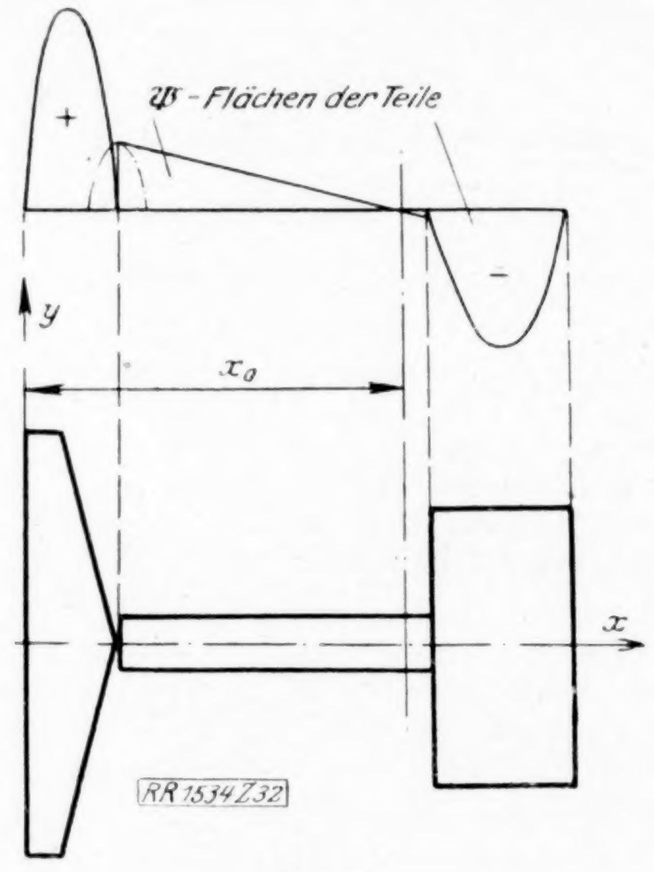


Abb. 32

Die größten Spannungen sind

im Kopf: $\tau_1'' \sim 0{,}93 \cdot 3{,}6\,G\,\vartheta_1 = \frac{0{,}93 \cdot 3{,}6\,(12 - 9{,}65)}{2\,(m+1)}\,\sigma_0' \sim \sigma_0'$,

im Fuße: $\tau_3'' \sim 2{,}3\,G\,\vartheta_3 = \frac{2{,}3\,(1{,}15 - 9{,}65)}{2\,(m+1)}\,\sigma_0' \sim -\,2{,}3\,\sigma_0'$.

Die größte Hauptschubspannung tritt im Fuße auf und ist
$$\tau_3' \sim 12{,}2\,\sigma_0'.$$

Die Zusatzschubspannung ist selbst bei diesem in Richtung der Nullinie ausgedehnten Querschnitte von geringer Bedeutung. In der Praxis werden sie mit Recht stets vernachlässigt. 365

KLEINE MITTEILUNGEN

Einfache Konstruktion der Beschleunigung. Während noch vor einigen Jahrzehnten die Ermittelung der Beschleunigung eines Maschinenteils etwas seltenes war, hat die Steigerung der Geschwindigkeit und der damit zusammenhängenden dynamischen Beanspruchung vieler Maschinenteile diese Sachlage wesentlich geändert. In vielen Fällen wird aber die sehr notwendige Untersuchung unterlassen, weil die meisten bekannten Verfahren zur Ermittelung der Beschleunigung recht zeitraubend sind.

Hierdurch wurde ich veranlaßt, das nachfolgende einfache Verfahren auszuarbeiten, welches ich seither nur im Unterricht mitgeteilt habe.

Bewegt sich ein Punkt eines Maschinenteiles auf einer ebenen Kurve, z. B. auf einem Kreise, so hat es in der Regel keine Schwierigkeit in der Zeichnung, eine Reihe von Lagen des Punktes mit dem Zirkel anzustechen, welche nach gleichen Zeitintervallen erreicht werden. In Bild 1 sind einige Punkte einer solchen Z e i t t e i l u n g mit 1 bis 4 bezeichnet. Bedeutet ferner s_{12} den auf dem Bogen gemessenen Weg von 1 bis 2, t die auf den Weg zwischen zwei benachbarten Punkten entfallende Zeit, so ist $\frac{s_{12}}{t}$ die mittlere Geschwindigkeit auf der Strecke s_{12}. Ebenso ist aber $\frac{s_{13}}{2t}$ die mittlere Geschwindigkeit auf der Strecke

s_{13}. Je kleiner die Entfernung der Punkte ist, einen umso geringeren Fehler wird man begehen, wenn man annimmt, daß die mittlere

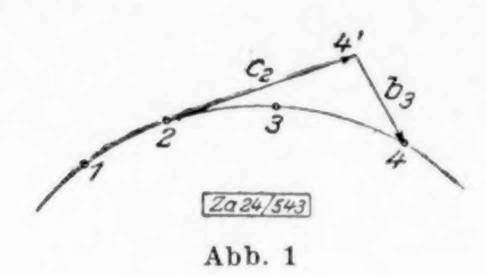


Abb. 1

Geschwindigkeit für die Strecke s_{13} zugleich die momentane Geschwindigkeit in dem mittleren Zeitpunkte der Strecke, d. h. im Punkte 2 ist. Heißt diese Geschwindigkeit c_2, so ist also näherungsweise

$$c_2 = \frac{s_{13}}{2\,t}.$$

In gleicher Weise wäre z. B. auch $c_3 = \frac{s_{24}}{2\,t}$ usw. Man kann also die Bogenstrecken über zwei Zeitteilen, oder mit einer meist hinreichenden Annäherung ihre Sehnen, als Geschwindigkeitsvektoren für ihre mittleren Zeitpunkte betrachten und in diesem Zeitpunkt tangential zur Bahnkurve antragen, wie es in Bild 1 für c_2 geschehen ist. Fände auf dem Wege s_{24} weder Tangentialbeschleunigung noch Normalbeschleunigung statt, so würde der laufende Punkt von 2 ausgehend nach der Zeit $2\,t$ nach 4' gelangen. Da er in Wirklichkeit nach dem Punkte 4 gelangt, so ist der Vektor 4'4 die sogenannte Deviation oder Abtrift, welche sich infolge der Beschleunigung beim Durchlaufen der Bahnstrecke s_{24} vollzieht. Bezeichnen wir die wirkliche Größe dieser Strecke mit b_3 und die mittlere Beschleunigung auf der Strecke s_{24}, die wir als die Beschleunigung in dem mittleren Zeitpunkte 3 auffassen können, mit φ_3, so ist bekanntlich

$$b_3 = {}^1/_2\,\varphi_3\,(2\,t)^2,$$

also die mit 4'4 gleich gerichtete Beschleunigung

$$\varphi_3 = \frac{b_3}{2\,t^2}.$$

Trägt man in den Punkten 3, 5, 7 ... die Vektoren 4'4, 6'6, 8'8 ... oder ein vielfaches davon an, so erhält man ein anschauliches Bild für die Aenderungen der Beschleunigung für den Verlauf der Bewegung. Falls die Bahn eine gerade Linie ist, so empfiehlt es sich, die Vektoren rechtwinklig zur Bahn anzutragen.

Man könnte auch die Beschleunigungsvektoren von einem Pol aus abtragen. Ein solches Bild würde jedoch den Zusammenhang zwischen der Lage des laufenden Punktes nicht so unmittelbar erkennen lassen.

Erfolgt die Konstruktion der Beschleunigung nur zum Zwecke der Festigkeitsrechnung, so wird man sich in der Regel auf diejenigen Teile der Kurve beschränken können, in denen schon nach Augenschein die größten oder die dynamisch ungünstigsten Beschleunigungen zu erwarten sind.

Für ebene Bewegung eines Maschinenteils genügt bekanntlich die Kenntnis der Beschleunigung zweier Punkte, um daraus die Beschleunigung aller Punkte abzuleiten und die dynamische Belastung zu berechnen.

Karlsruhe i. B. Ernst A. Brauer. 340

Eine Eigenschaft der Sterbetafel. Man bezeichne mit $l(x)$ die Wahrscheinlichkeit eines Geborenen, den xten Geburtstag zu überleben. Dann ist $l(0) = 1$ und $l(\omega) = 0$, wobei $\omega - 1$ den höchsten erreichbaren Geburtstag bezeichnet. Die $l(x)$ sind die Ueberlebenden der Sterbetafel, wenn man von einem Geborenen ausgeht; also die Zahl der Sterbetafel durch die darin angenommene Grundzahl der Geborenen, meist 100 000, dividiert. Die $l(x)$ stellen den Altersaufbau einer stationären Bevölkerung dar. Es liegen zwar sehr viele Beobachtungen der $l(x)$ vor, jedoch scheint es ein Naturgesetz für ihren Verlauf nicht zu geben.

Man setze

$$\frac{1}{l(x)}\int_x^\omega l(x)\,dx = \varepsilon_x(0) \quad . \quad . \quad (1);$$

speziell

$$\int_0^\omega l(x)\,dx = \varepsilon\,(0)$$

und

$$\int_x^\omega x\,l(x)\,dx = \varepsilon\,(1)\,. \quad . \quad . \quad (2).$$

$\varepsilon_x(0)$ wird als die Lebenserwartung eines x-jährigen bezeichnet. Ferner ist $\frac{\varepsilon(1)}{\varepsilon(0)} = \bar{x}$ gleich dem mittleren Lebensalter in der stationären Bevölkerung.

Im folgenden soll bewiesen werden, daß für alle Sterbetafeln

$$\varepsilon\,(0)^2 > \varepsilon\,(1)\ (3),$$

d. h., daß in einer stationären Bevölkerung die Lebenserwartung eines Neugeborenen größer ist als das Durchschnittsalter der Lebenden.

L. v. Bortkiewicz[1]) hat gezeigt, daß diese Beziehung mit den Eigenschaften der Sterbeintensität $\mu_x = \frac{-\,d\,l(x)}{l(x)\,dx}$ zusammenhängt. Mithilfe einer einfachen Identität kam er zu dem Schluß: Je nachdem, ob für den Verlauf der ganzen Sterbetafel $\mu'(x) \lesseqgtr 0$ ist, gilt $\varepsilon\,(0)^2 \lesseqgtr \varepsilon\,(1)$. Nun ist tatsächlich bei allen Sterbetafeln angenähert für $x \lesseqgtr 15$ das $\mu'(x) \lesseqgtr 0$. Und es entsteht die Frage, welche von diesen Relationen für die Sterbetafel als ganzes genommen die stärkere ist. Um dies ohne Beziehung auf eine bestimmte Absterbeordnung nachzuprüfen, muß man zunächst die störende Tatsache beseitigen, daß die Reihe der $l(x)$ nur numerisch und nicht analytisch gegeben ist. Man berechne daher $\varepsilon\,(0)$ und $\varepsilon\,(1)$ für eine fiktive Absterbeordnung $l'(x)$, die einen einfachen analytischen Ausdruck hat, jedoch so

[1]) L. v. Bortkiewicz, Die mittlere Lebensdauer, S. 77. G. Fischer. Jena 1893.

beschaffen ist, daß das zu ihr gehörige $\varepsilon'(0) = \varepsilon(0)$, **während gleichzeitig** $\varepsilon'(1) > \varepsilon(1)$. **Gilt dann die Relation** $\varepsilon'(0) \gtreqless \varepsilon'(1)$ **hierfür,** so ist (3) bewiesen. Um l' zu ermitteln, ist in der Figur die Absterbeordnung für das deutsche Reich 1891 bis 1900 aufgetragen. Man bilde nun l' als eine Gerade, welche die

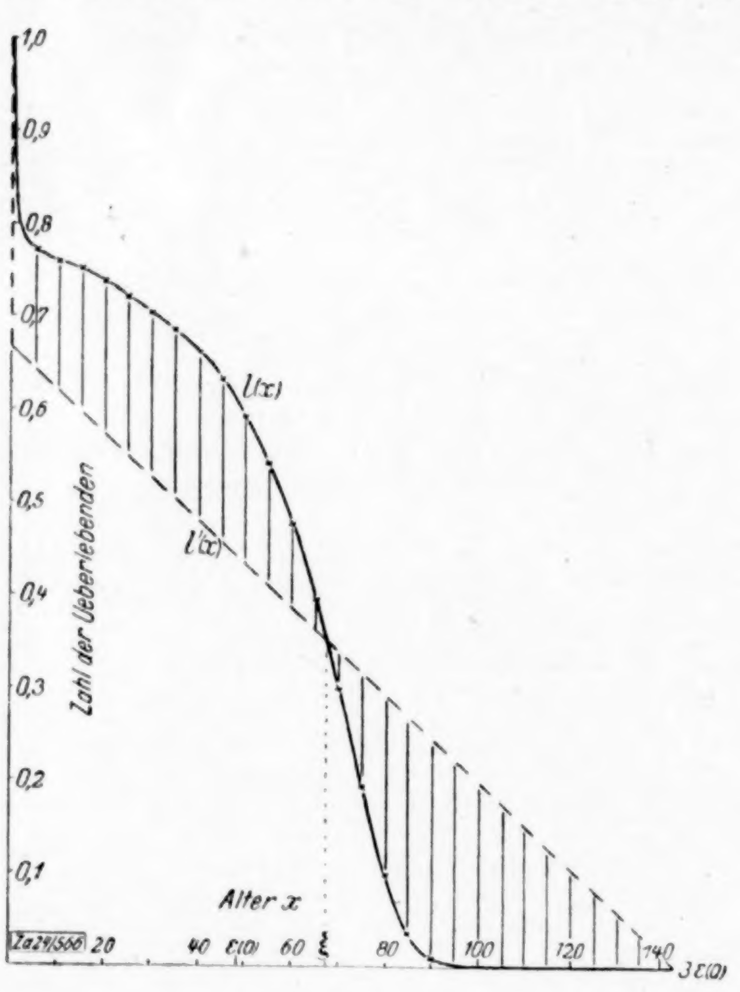


Abb. 1

Ordinate bei $^2/_3$, die Abszisse bei $3\varepsilon(0)$ schneidet, d. h. eine Absterbeordnung, bei der ein Drittel der Geborenen sofort stirbt, während der Rest linear mit dem Alter abnimmt, bis die Generation bei $x = 3\varepsilon(0)$ ausgestorben ist. Die Lebenserwartung eines Neugeborenen ist in dieser Absterbeordnung ebenfalls $\varepsilon(0)$. Wie man sieht, verläuft l' bis zu einem Punkt $x = \xi$ unterhalb, dann oberhalb von l. Das zugehörige $\varepsilon'(1)$ ergibt sich aus

$$^2/_3 \int_0^{3\varepsilon(0)} x\left(1 - \frac{x}{3\,\varepsilon(0)}\right) dx = \varepsilon(0)^2,$$

d. h. das Durchschnittsalter der Lebenden ist ebenfalls $\varepsilon(0)$. Dieses $\varepsilon'(1)$ ist nun stets größer als das $\varepsilon(1)$. Denn da ex definitione

$$\int_0^\omega l(x)\,dx = \int_0^\omega l'(x)\,dx,$$

so ist für jedes ξ

$$\varepsilon(1) - \varepsilon'(1) = \int_0^\omega x\,[l(x) - l'(x)]\,dx$$

$$= \int_0^\omega (x - \xi)\,[l(x) - l'(x)]\,dx.$$

Da aber $l(x) - l'(x) \gtreqless 0$, **wenn** $x \lesseqgtr \xi$, **so ist das Integral stets negativ, also** $\varepsilon'(1) = \varepsilon(0)^2 > \varepsilon(1)$, **was zu beweisen war.**

Demnach gilt folgender Satz: W e n n b e i e i n e r S t e r b e t a f e l s i c h e i n A l t e r ξ k o n s t r u i e r e n l ä ß t , s o d a ß f ü r j e d e s $x \lesseqgtr \xi$ **d i e R e l a t i o n** $l(x) \gtreqless l'(x)$ **b e s t e h t ,** w o b e i $l'(x)$ i m S i n n d e r Z e i c h n u n g d e f i n i e r t i s t , s o i s t d i e L e b e n s e r w a r t u n g e i n e s N e u g e b o r e n e n g r ö ß e r a l s d a s m i t t l e r e A l t e r d e r L e b e n d e n.

Diese Beweismethode setzt nichts über die analytische Natur von $l(x)$ voraus und läßt sich außerordentlich einfach durchführen. Die Nachprüfung zeigte, daß der Satz für die Sterbetafeln aller heutigen Kulturländer zutrifft.

Dieser Satz läßt sich noch auf andere Arten ausdrücken. Da in einer stationären Bevölkerung $\frac{1}{\varepsilon(0)}$ **gleich der Geburten- bezw. Sterbe**ziffer ist, so ist hier die Geburten- bezw. Sterbeziffer stets kleiner als der reziproke Wert des Durchschnittsalters der Lebenden.

Wegen der Anfangsbedingungen ist $\varepsilon(0)$ auch gleich dem mittleren Alter beim Tod. Denn

$$\int_0^\omega l(x)\,dx = -\int_0^\omega x\,d\,l(x)\cdot$$

Daher ist das Durchschnittsalter der Lebenden in einer stationären Bevölkerung kleiner als das mittlere Alter beim Tod, was keineswegs selbstverständlich ist, da ja die Lebenden und Gestorbenen eine ganz verschiedene Alterverteilung besitzen.

Man kann den Satz auch als eine Aussage über die Verteilung der $\varepsilon(x)$ auffassen. Man bilde das mittlere Alter der über x Jahre Alten

$$\overline{x_x} = \frac{\int_x^\omega x\,l(x)\,dx}{\int_x^\omega l(x)\,dx}$$

und den Mittelwert der Lebenserwartungen der über x Jahre Alten

$$\overline{\varepsilon_x(0)} = \frac{\int_x^\omega l(x)\,\varepsilon_x(0)\,dx}{\int_x^\omega l(x)\,dx}.$$

Beide Größen stehen in nahem Zusammenhang. Setzt man nämlich

$$\int_x^\omega l(x)\,dx = f(x),$$

so wird nach (1)

$$\int_x^\omega l(x)\,\varepsilon_x(0)\,dx = \int_x^\omega f(x)\,dx = \Big[x\,f(x)\Big]_x^\omega - \int_x^\omega x\,d\,f(x).$$

Da aber

$$f(\omega) = 0 \text{ und } l(x) = -\frac{d\,f(x)}{d\,x},$$

so wird

$$\int_x^\omega l(x)\,\varepsilon_x(0)\,dx = -x\,f(x) + \int_x^\omega x\,l(x)\,dx,$$

also

$$\overline{\varepsilon_x(0)} + x = \overline{x_x} \quad . \; . \; . \; (4).$$

Diese Formel wird vor allem zur Interpolation bei unvollständigen Tabellen von Wichtigkeit sein. Wie man an Hand dieser Ableitung leicht sieht, gilt dieser Satz auch für n verbundene gleichaltrige Lebende. Man hat zum Beweis nur $l(x)$ durch $l^n(x)$ zu ersetzen. Das mittlere Alter von n gleichaltrigen, über x Jahre alten verbundenen Lebenden ist in einer stationären Bevölkerung gleich dem Alter x plus dem Mittelwert der Lebenserwartungen von n gleichaltrigen, über x Jahre alten verbundenen Lebenden. Speziell ist also für $x = 0$ und $n = 1$ das mittlere Alter aller Lebenden in einer stationären Bevölkerung gleich dem Mittelwert aller Lebenserwartungen [1]). Demnach gilt für die Verteilung der $\varepsilon(0)$ über die $l(x)$ der Satz: Die Lebenserwartung eines Neugeborenen ist größer als der Mittelwert aller Lebenserwartungen.

Heidelberg. E. J. Gumbel. 382

Beitrag zur Nomographie. In seinem in dieser Zeitschrift [2]) erschienenen Aufsatz »Die Dreiecktafeln und die hydraulische Energieumwandlungskurve« benützt Herr O. Lacmann das gleichseitige Dreieck als Grundlage seiner Nomogramme. Insbesondere deutet er am Schlusse an, daß sich auch Gleichungen von der Form

$$[f(X)]^p\,[g(Y)]^q\,[h(Z)]^r = C,$$

in der $f(X)$, $g(Y)$, $h(Z)$ beliebige, in den betrachteten Intervallen stetige Funktionen der drei Veränderlichen X, Y, Z und p, q, r beliebige Exponenten sind, nach erfolgtem Logarithmieren leicht durch Dreieckrechentafeln darstellen lassen.

Im folgenden soll in Kürze gezeigt werden, wie diese und ähnliche Aufgaben auch auf anderem Wege gelöst werden können.

a) Zwei Veränderliche.

Es sei zunächst die Gleichung

$$[f(X)]^a\,[g(Y)]^b = C$$

behandelt. Logarithmieren ergibt mit leichtverständlicher Substitution

$$a\,x + b\,y = c.$$

Hier bieten sich zwei Wege dar:

1. Benützt man das gewöhnliche rechtwinklige Koordinatensystem und trägt (s. Abb. 1) $A = \frac{a}{\xi}$ auf der Ordinaten-, $B = \frac{b}{\xi}$ auf der Abszissenachse auf (wobei ξ sofort bestimmt werden wird), so gilt für jeden Punkt der Geraden g

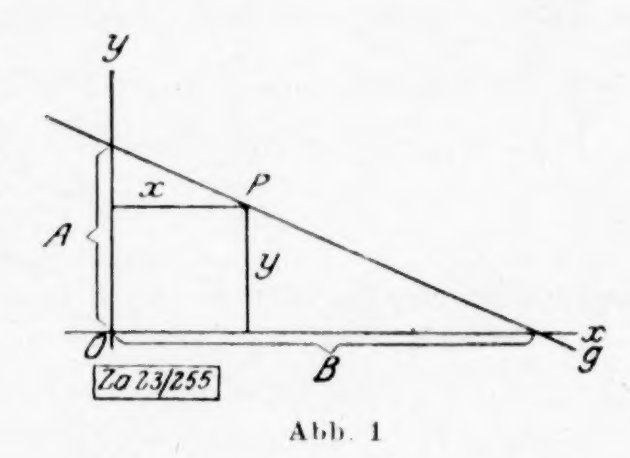


Abb. 1

$$A\,x + B\,y = A\,B \quad \text{oder} \quad a\,x + b\,y = \frac{a\,b}{\xi}.$$

Aus der Identitätsbedingung

$$\frac{a\,b}{\xi} = c \text{ ergibt sich } \xi = \frac{a\,b}{c}.$$

Die Benützung dieser Tafel ist ohne weiteres verständlich.

2. Im zweiten Falle wird ein im allgemeinen schiefwinkliges Koordinatensystem benützt, dessen Achsenwinkel sich erst aus den folgenden Rechnungen ergibt.

Ist wieder

$$a\,x + b\,y = c,$$

so muß, damit diese Gleichung erfüllt ist, nach Auftragung von a auf der Ordinaten- und

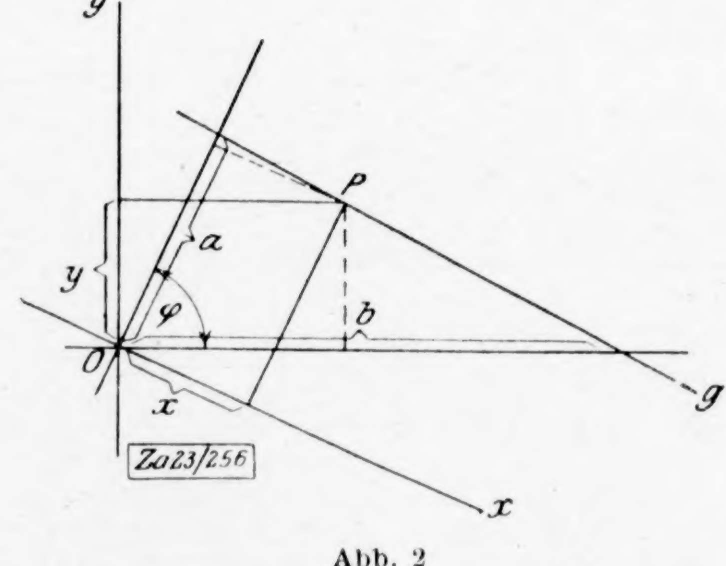


Abb. 2

von b auf der Abszissenachse, der Achsenwinkel φ (s. Abb. 2) sich aus folgender Glei-

[1]) Vergl. E. Czuber, Mathematische Bevölkerungstheorie nach Knibbs, S. 85. Teubner. Berlin 1923.

[2]) Bd. 2, 1922, S. 375.

chung bestimmen lassen:

$$ab \sin \varphi = c, \quad \sin \varphi = \frac{c}{ab}.$$

(Ist $c > ab$, so läßt sich durch eine geeignete Transformation, z. B. $x = x_1 + m$, doch stets ein rechter Winkel herbeiführen). Zeichnet man im Ursprung O die zu den a- und b-Richtungen senkrechten x- und y-Geraden, auf denen die entsprechenden Skalen aufgetragen werden, so ergeben sich auf die aus der Abb. 2 ersichtliche Weise die zusammengehörigen Werte der Unbekannten.

b) Drei Veränderliche.

Die Gleichung

$$[f(X)]^a \, [g(Y)]^b \, [h(Z)]^c = D$$

ergibt durch Logarithmieren mit leichtverständlicher Substitution

$$a x + b y + c z = d.$$

Auch hier ergeben sich zwei Wege:

1. Analog dem im vorhergehenden unter 1. behandelten Falle ergibt sich nach Aufzeichnung des Dreiecks mit den Seiten

$$A = \frac{a}{\xi}, \quad B = \frac{b}{\xi}, \quad C = \frac{c}{\xi},$$

$$Ax + By + Cz = 2F,$$

wobei F nach der Heronischen Formel zu berechnen ist. Anderseits muß $2F = d$ sein, woraus sich ξ ergibt. Trägt man auf einem

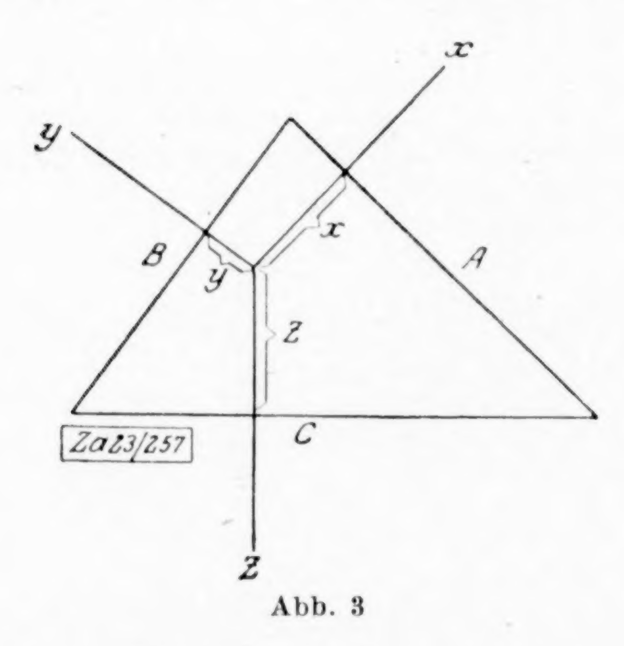


Abb. 3

— in der Abb. 3 angedeuteten — auf einen durchsichtigen Papier befindlichen Achsenkreuz die x-, y- und z-Skala auf, so kann dieses zur Lösung der vorgelegten Aufgabe in bekannter Weise verwendet werden.

2. Benützt man unmittelbar a, b, c als Dreiecksseiten, so ist

$$a x + b y + c z = 2F \mp d.$$

Die nötige Identität herzustellen, gelingt durch Transformation, z. B. $x = \xi + \alpha$, $a\xi + b y + c z = 2F - a\alpha = d$.

$$\alpha = \frac{2F - d}{a}.$$

Der weitere Vorgang ist der gleiche wie im Fall 1.

Genügen a, b, c — also auch A, B, C — nicht den zur Konstruktion eines Dreiecks erforderlichen Bedingungen, so ist die Gleichung

$$a x + b y + c z = d$$

z. B. in

$$m a \frac{x}{m} + n b \frac{x}{n} + c z = d$$

umzuformen (m, n beliebige, zweckentsprechende Zahlen) und $\frac{x}{m}$ bezw. $\frac{y}{n}$ als neue Unbekannte aufzufassen.

c) Anwendungen.

Von dem unter a 1) behandelten Falle sollen zwei Anwendungen in Kürze besprochen werden:

α) Es seien die beiden linearen Gleichungen

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

gegeben. Trägt man die entsprechenden $A_i = \frac{c_i}{b_i}$ und $B_i = \frac{c_i}{a_i}$ $(i = 1,2)$ auf den bezüglichen Achsen auf und sucht den Schnitt der so festgelegten Geraden, so ergibt sich in den zum Schnitt gehörigen x, y die Lösung des vorgelegten Systems.

β) Setzt man in der Gleichung $a x + b y = c$

$$x = \varrho^m, \quad y = \varrho^n,$$

so entsteht die trinomische Gleichung.

$$a \varrho^m + b \varrho^n = c.$$

Es ergibt sich ihre Lösung als Schnitt der durch $A = \frac{c}{b}$ und $B = \frac{c}{a}$ festgelegten Geraden mit der Kurve $\varrho^n = f(\varrho^m)$. Versieht man die Kurve — durch Hinaufloten der ϱ-Werte — mit einer ϱ-Skala, so ergibt sich ein Nomogramm zur Lösung der Gleichung, das aber den Nachteil hat, daß jeweils die Quotienten $\frac{c}{b}$ und $\frac{c}{a}$ gebildet werden müssen, was z. B. bei den Fluchtentafeln nicht der Fall ist[1]).

Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich, läge in der Heranziehung der Flächenbeziehungen vielleicht eine weitere Verallgemeinerungsmöglichkeit für die Nomographie.

Wien, im April 1923.

Alexander Fischer. 287

[1]) Der besprochene Fall kann als besonderer Fall der Gleichungen von der Form

$$x = \varphi_1(\varrho), \quad y = \varphi_2(\varrho)$$

angesehen werden, die ebenfalls nach der oben gegebenen Art gelöst werden können.

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die Sortiment-Abteilung des VDI-Verlages, Berlin SW 19, Beuthstraße 7, zu beziehen.)

REINHOLD **RÜDENBERG,** Professor Dr.-Ing. und Dr.-Ing. e. h., Chef-Elektriker der Siemens-Schuckertwerke, Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Berlin. Elektrische Schaltvorgänge und verwandte Störungserscheinungen in Starkstromanlagen. Mit 477 Abb. im Text und 1 Tafel. Verlag von Julius Springer. Berlin 1923. VIII + 504 S.

Die stationären Vorgänge in Wechselstromanlagen sind mehr und mehr zum gesicherten Wissensbesitz aller Elektrotechniker geworden, auf ihm beruhen die meisten Kalkulationen elektrischer Anlagen. Aber gerade die Sicherheit, mit der man mit diesen Begriffen umzugehen sich gewöhnt hat, wurde oft zu einer Gefahr; sie ließ vergessen, daß jede Störung der Voraussetzungen für stationären Betrieb in elektrischen Anlagen zu Spannungen und Strömen von ganz anderer Größe führen kann, als die alltäglich gewöhnten. Das große Gebiet der elektrischen Ausgleichsvorgänge, so zahlreich auch seine Literatur ist, ist doch im elektrotechnischen Unterricht stets mehr als Spezialgebiet behandelt worden und blieb vielen praktischen Elektrotechnikern mehr oder weniger unbekannt. Es muß deshalb dem Verfasser obigen Werkes als ein großes Verdienst angerechnet werden, daß er durch sein Buch versucht, einem größeren Kreis von Technikern diese Untersuchungen näher zu bringen und zu zeigen, daß hier verhältnismäßig recht elementare mathematische Hilfsmittel, verbunden mit einer genauen Kenntnis der elektromagnetischen Grundgesetze, ausreichen, um eine Fülle von praktischen Aufgaben zu bewältigen. Vom mathematischen Standpunkt handelt es sich ja meist nur um die Zusammensetzung freier Schwingungen mit den »stationären« erzwungenen Schwingungszuständen.

Das Buch wendet sich hauptsächlich an die Ingenieure, die Klarheit über die Vorgänge haben wollen, die ihnen bei ihrer Arbeit vielfach Schwierigkeiten und Gefahren bereiten. Ich denke aber, daß es gerade auch für den technischen Unterricht ein vorzügliches Hilfsmittel werden wird, dem reiferen Studierenden durch präzise mathematische Darstellung diese Gebiete verständlich zu machen. Und endlich wird auch mancher Lehrer der angewandten Mathematik aus dem Buch eines die theoretischen Grundlagen beherrschenden praktischen Ingenieurs, sich gerne Beispiele für seinen Unterricht auswählen. In dieser Hinsicht sei z. B. auf die Behandlung der Schwingungskreise mit nicht linearer Charakteristik hingewiesen. Die mathematischen Hilfsmittel sind einfach und setzen nicht mehr Kenntnisse als die üblichen über gewöhnliche Differentialgleichungen und die einfachsten Fälle partieller Differentialgleichungen voraus, dazu einen gewissen Sinn für die Handhabung mathematischer Näherungsmethoden. Was die physikalische Seite des Buches betrifft, so ist reichlicher Stoff in vielen neu aufgenommenen Oszillogrammen der behandelten Schwingungs- und Ausgleichsvorgänge enthalten.

Der erste Abschnitt, der in die Kapitel: Einfache Stromkreise, magnetisch verkettete Stromkreise, Schalten von Motoren, Störung der Leitungsumgebung zerfällt, behandelt die im Allgemeinen als »quasistationär« bezeichneten langsamen Schaltvorgänge auf der Grundlage gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen. Er gibt eine dankenswerte Bearbeitung der in der physikalischen und technischen Literatur verstreuten Darstellungen dieser Gebiete. Wenig bekannt und schwieriger sind hier z. B. die Untersuchungen im zweiten Kapitel über die freien Drehfelder in Mehrphasenmaschinen und die im vierten Kapitel über die Wirkung des Erdungsseiles von Hochspannungsübertragungen.

Der nächste Abschnitt handelt von den Vorgängen in Stromkreisen mit gekrümmter Charakteristik, die durch Lichtbogenwirkung (5. Kapitel) und magnetische Sättigung (6. Kapitel) zustande kommt, also nichtlinearen Differentialgleichungen. In diesem Teil finden sich eine größere Anzahl dem Verfasser zugehöriger neuer Problemstellungen und Entwicklungen; als nichtstationäre Vorgänge mit gekrümmter Charakteristik seien genannt: Die Lichtbogenwirkung beim Ausschalten von Wechselstrom mittels Luft- und Oelschalter, Rückzündung von Kapazitätskreisen u. a. m. Nicht in allen Fällen beruhen die Näherungsrechnungen hier auf Abschätzungen, die im mathematischen Sinn als streng zu bezeichnen wären, so z. B. die Behandlung des Sättigungsstoßes im 6. Kapitel. Aber sie werden durch den Vergleich mit den aufgenommenen Oszillogrammen gerechtfertigt. Von besonderem Interesse sind auch die in solchen Stromkreisen auftretenden Mehrdeutigkeiten des stationären Betriebs und die damit in Verbindung stehenden Stabilitätsfragen (31). Nr. 30 enthält eine Untersuchung der Oberschwingungen in magnetisch gesättigten Dynamomaschinen und Transformatoren.

Sehr ausführlich wird im letzten Abschnitt das Gebiet der Wanderwellen auf Leitungen behandelt, sowohl auf homogenen (7. Kap.) als auch zusammengesetzten (8. Kap.), schließlich im 9. Kapitel noch Leitungen mit eingeschalteten Spulen und Kondensatoren, wie sie zu Schutzzwecken viel gebraucht werden. Diese Kapitel, die auch in der mathematischen Darstellung (lineare partielle Differentialgleichungen) manche neue Wendung bieten, können als eine wertvolle Ergänzung zu dem bekannten Buch von K. W. Wagner aufgefaßt werden. Während dort die mathematische Berechnung weitergeführt ist, findet sich hier eine größere Fülle von technischen Anknüpfungspunkten (vergl. z. B. Nr. 37: Rückzündun-

gen). Teilweise neu ist die Darstellung der Uebertragung von Wellen auf Nachbarleitungen, ebenso eine Reihe der über Schutzspulen und Kondensatoren abgeleiteten Gesichtspunkte. Schließlich enthält das letzte Kapitel auch eine knappe Darstellung der Theorie der Wanderwellen im Innern von Spulen nach dem Bild der Kettenleiter; die resultierende Differentialgleichung dient hauptsächlich zur Erklärung der kritischen Frequenz der Spulen und der Abflachung unstetiger Wellenfronten in denselben. Obwohl für dieses Gebiet auch Ansätze auf Grund der Maxwellschen Feldtheorie vorliegen, ist es doch zu kompliziert, als daß man auf dem strengen Wege bis zur vollen Integration durchdringen könnte. Die Technik mußte sich daher die Begriffe der verteilten Kapazität und Induktivität und der gegenseitigen Windungskapazität schaffen. Verschiedene anschauliche Feldzeichnungen erleichtern hier das Verständnis solcher Hilfsbegriffe.

Erwähnt sei noch das ausführliche Literaturverzeichnis am Ende; es erhöht noch den Wert des reichhaltigen Buches, das Lehrern, Studenten und Ingenieuren wärmstens zu empfehlen ist. F. Noether. 356

H. CRANZ und KAMMERER, Versuche mit Zahnrädern von Straßenbahnwagen. Mit 19 Textabbildungen. — H. MARKMANN, Versuche mit schnellaufenden Riemscheiben. Mit 17 Textabb. Versuchsergebnisse des Versuchsfeldes für Maschinenelemente der Technischen Hochschule zu Berlin (Vorsteher: Prof. Kammerer), 3. u. 4 Heft. Druck und Verlag von R. Oldenbourg. München und Berlin 1923. 36 S.

Die Versuche sind ebenso wie die Versuchseinrichtungen von allgemeinem Interesse, so daß ihre Veröffentlichung recht dankenswert ist. Bei den Versuchen mit Zahnrädern von Straßenbahnen handelt es sich um bestellte Untersuchungen, durch welche der Einfluß der Zahnräder-Abnutzung auf ihren Wirkungsgrad festgestellt werden sollte. Die Ergebnisse sind übersichtlich dargestellt, nur bedauert man die bei den hohen Druckkosten vielleicht verständliche Unterdrückung der einzelnen Versuchswerte. (Statt der ursprünglichen Meßwerte der absoluten Verluste sind gleich die davon abgeleiteten und wieder interpolierten Kurven der relativen Wirkungsgrade mitgeteilt, auf die es für den Besteller der Versuche zwar letzten Endes meistens ankommt, während die Gesetzmäßigkeiten und Meßfehler von Verlusten, die nur wenige Prozent betragen, nur aus ihren absoluten Beträgen voll erkannt werden.) Bei voller Beanspruchung war der Verlust von neuen Rädern nur 2 vH, der von abgenützten stieg auf 10 bis 14 vH, ein Ergebnis, das nur durch die wesentlich verstärkte Reibungsarbeit erklärt werden kann, die zwischen den Verzahnungen infolge der Massendrücke auftritt. Die Versuche fanden bei den geringen Umfangsgeschwindigkeiten von 3 bis 4 m/s statt und sind nicht ohne weiteres auf Versuche mit 10 mal höheren Umfangsgeschwindigkeiten und starker Schmierung übertragbar, die uns leider heute noch fehlen.

Für die Festigkeitsberechnung sind die Versuche mit raschlaufenden Riemenscheiben recht lehrreich, deren Deformation gemessen wurde, indem an 24 Punkten des Scheibenumfanges der Reihe nach Stifte aufgesetzt wurden, deren mit der Drehzahl zunehmende Mittenentfernung von außen genau abgetastet wurde. Auf diese Weise zeigten sich besonders kraß die starken und gefährlichen Deformationen bei Anbringung von Ausgleichgewichten am Kranze, welche die mögliche Umdrehungsgeschwindigkeit rotierender Scheiben erheblich beeinträchtigte. (Während normale einteilige gußeiserne Scheiben bis zu 90 m/s Umfangsgeschwindigkeiten nicht zum Bruche gebracht werden konnten, brach eine einseitig belastete schon bei etwa 60 m/s Umfangsgeschwindigkeit; üblich sind für Gußeisen höchstens 30 m/s.) Im übrigen bestätigen die Versuche die Rechnung, wonach durch Fliehkraft allein bei den im Maschinenbau gewohnten Formen und Geschwindigkeiten keine bedenklichen Beanspruchungen im Kranze auftreten, und die Beobachtung, daß die durch ungleichmäßige Abkühlung auftretenden innern Spannungen von Guß-Scheiben ganz bedeutend höher sein können.

Dresden. K. Kutzbach. 281

A. und O. FÖPPL. Grundzüge der Festigkeitslehre. Mit 141 Abbildungen im Text und auf einer Tafel. Teubners Technische Leitfäden. Bd. 17. Leipzig-Berlin 1923. 290 S.

Nach der im Vorwort zum Ausdruck gebrachten Absicht leitete die Verfasser dieses Buches der Wunsch, ein Hilfsmittel für strebsame Ingenieure zu schaffen, die das Bedürfnis empfinden, ihre theoretischen Kenntnisse zu erweitern. Die 8 Abschnitte, in die sich ihr Buch gliedert, tragen die Ueberschriften: 1. der einachsige Spannungszustand, 2. der zweiachsige und der dreiachsige Spannungszustand, 3. die Biegungslehre, 4. die Verdrehungslehre, 5. die zusammengesetzte Beanspruchung stabförmiger Körper, 6. Platten, Rohre und Gefäße, 7. umlaufende Räder und Scheiben, 8. Schwingungsfestigkeit und Schwingungsrisse. Die Verfasser heben als eine besondere Eigentümlichkeit ihres Buches die gegenüber verwandten Werken ausführlichere Behandlung der Verdrehungslehre hervor.

Sie bauen die Festigkeitslehre durchaus in der an einigen Hochschulen bevorzugten Weise auf, in der sich bei näherem Zusehen eine geschichtliche Entwicklung spiegeln dürfte, nämlich die Entstehung der Materialprüfungsanstalten und des Materialprüfungswesens der Technik, sowie eines Kreises von Festigkeitsaufgaben, auf welche die Aufmerksamkeit der Ingenieure etwa um die Jahrhundertwende gelenkt wurde. Die Grundbegriffe erscheinen als das Ergebnis einer phänomenologischen Registrierung von Erfahrungstatsachen, die obwohl seit langem auch zur Begriffsbildung in der Elastizitätslehre herangezogen, hier an Hand des Zug- und des Druckversuches auf-

gezählt und verwertet werden. Die in den letzten Jahrzehnten in den Forschungsstätten der Hochschulen und der großen Industriewerke des In- und Auslandes gesammelten wertvollen Erfahrungen lassen vielleicht den Zeitpunkt nicht mehr als einen fernen erscheinen, in dem in der Festigkeitslehre die durch einen ihrer weit vorausschauenden Vorkämpfer, durch Otto Mohr vorbereitete Revision und die Neufassung ihrer seinerzeit aus einem dringenden praktischen Bedürfnis und dem Zwange der Verhältnisse entstandenen Begriffe und ihrer Theorien der Brucherscheinungen von selbst sich vollziehen werden.

Zu begrüßen ist, daß über die Fließfiguren des weichen Eisens bei der Beschreibung des Zugversuches einiges gesagt wird. Zur bezüglichen Abbildung 5 auf Seite 15, welche die Erscheinung am Flacheisenstab erläutert, wäre vielleicht zu bemerken, daß die Gleitlinien auf den Breitseiten nicht nur unter einem Winkel von 45° zur Kante zu erscheinen brauchen, um dennoch, wie es die Mohrsche Theorie für den speziellen plastischen Körper verlangt, Gleitebenen anzugehören, die diesen Winkel mit der Stabachse bilden. Als ein lehrreiches Beispiel für die zusammengesetzte Beanspruchung bietet sich den Verfassern unter andern Aufgaben der Belastungsfall eines Kreisringes durch 4 gleiche Einzelkräfte, die paarweise in gleicher Richtung wirken. Aus dem Inhalte der Abschnitte über Biegung und Drehung seien noch hervorgehoben die Behandlung der verdrehten Walzeisenträger und Träger mit Hohlquerschnitten, sowie statisch unbestimmter Verdrehungsaufgaben und die Festigkeitsberechnung der Schwungräder. Die Spannungsverteilung in den umlaufenden Scheiben wird an ihrem einfachsten Fall (Scheibe gleicher Dicke) besprochen.

Aus den Versuchen zur Feststellung der Schwingungsfestigkeit, um deren Erforschung sich der eine Verfasser verdient gemacht hat und über die der letzte Abschnitt berichtet, haben sich bemerkenswerte Folgerungen ergeben. Sie führten unter anderm zu dem Ergebnis, daß die Oberflächenbeschaffenheit der Versuchskörper von großem Einfluß auf die Zahl der ertragenen Kraftwechsel ist. Ein Hundertstel Millimeter tiefe Risse, die beim Polieren der Stäbe zurückgeblieben waren, genügten, um den Riß bei Stahl vorzubereiten. Fehlstellen im Innern der Versuchskörper hatten eine ähnliche Wirkung.

Alles in Allem bietet das Buch in seiner lebendigen und leicht faßlichen Darstellung einen vortrefflichen Abriß der Festigkeitslehre, der, weil er die Grundzüge in einer Reihe von einfachen Aufgaben entwickelt, mathematischer Hilfsmittel in verhältnismäßig geringem Ausmaß bedarf und deshalb gewiß einem breiteren Leserkreis willkommen sein und wohl auch manchem Nichtingenieur es erleichtern wird, sich Rat auf diesem Gebiet zu holen.

Göttingen. A. Nádai. 369

LUDWIG **BIEBERBACH,** o. ö. Professor der Mathematik an der Friedrich-Wilhelms-Universität in Berlin. Theorie der Differentialgleichungen. Vorlesungen aus dem **Gesamtgebiet der gewöhnlichen und der partiellen** Differentialgleichungen. Mit 19 Textfiguren. Band VI aus: Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Verlag von Julius Springer. Berlin 1923. VII + 317 S. Grundzahl 10 ℳ, geb. 11,5 ℳ.

Das Erscheinen dieser Vorlesungen ist schon allein deshalb zu begrüßen, weil die meisten der bisher gebrauchten deutschen Lehrbücher über den in Rede stehenden Gegenstand vergriffen sind und tatsächlich Verlegenheit bestand, wenn man seinen Hörern ein Buch über Differentialgleichungen empfehlen sollte. Nun glaube ich aber überdies sagen zu dürfen, daß dieses Buch die Aufgabe, aus dem übergroßen Stoff das Wesentliche herauszugreifen, in recht befriedigender Weise löst. Sicher für den Universitätsstudenten, der hier die Grundlagen für eigenes weiteres Studium erhält: mit einer gewissen Einschränkung auch für den jungen Techniker und Physiker. Diese werden vielleicht nicht alles finden, was sie wünschen — man kann eben auf 319 Seiten nicht die Grundlagen der Theorie und auch noch die spezielle Durcharbeitung ausführlich bringen — aber sie werden doch überall soweit geführt, daß sie sicheren Boden für ihre Rechnungen unter die Füße bekommen. Es fehlen weder die graphischen Verfahren noch die numerischen von Runge und Kutta, auch findet man bei den linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung die in der Praxis gebräuchlichen Ansätze. Vielleicht wäre es bei einer Neuauflage gut, für die Leser gewisse schwierige Teile, die schon im dritten und vierten Kapitel des ersten Abschnittes stehen, aber für das Studium des Weiteren zunächst entbehrt werden können, als solche zu bezeichnen. Das Buch würde an praktischer Brauchbarkeit für den **Nichtmathematiker gewinnen.**

Das Buch gliedert sich in vier Abschnitte. Das erste Kapitel des ersten Abschnitts (gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung) bringt auf 24 Seiten die bekannten formalen Integrationsmethoden. Sehr schön ist das zweite Kapitel: die Methode der sukzessiven Approximationen. Dadurch, daß diese Methode vorangestellt und dann der Satz bewiesen wird, daß sich das Resultat wenig ändert, wenn man Differentialgleichung und Anfangsbedingung wenig ändert — ein auch weiterhin äußerst fruchtbarer Satz — gelingt die Erledigung der Polygonmethode und der Methode der Potenzreihen in überraschend einfacher Weise. Die Uebertragung der Simpsonschen Regel beendigt das Kapitel. Das dritte Kapitel bringt die Diskussion des Verlaufs, das Verhalten an singulären Stellen in engem Anschluß an eine Arbeit Bendixsons. Das Kapitel enthält auch die Theorie der singulären

Lösungen. Das vierte Kapitel, die Theorie im komplexen Gebiet, behandelt den funktionentheoretischen Charakter der Integrale. Aus dem zweiten Abschnitt (gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung) möchte ich das dritte Kapitel: Diskussion des Verlaufs der Integralkurven, besonders hervorheben. Es enthält außerordentlich viel, bringt im Anschluß an die fundamentale Arbeit Birkhoffs eine Untersuchung über geschlossene Integralkurven, bespricht die Oszillationstheoreme und Randwertaufgaben linearer Gleichungen, im Zusammenhange damit die Theorie der Eigenwerte und Eigenfunktionen nebst Entwicklungssatz und schließt mit der Besselschen Differentialgleichung. Das vierte Kapitel enthält wieder den funktionentheoretischen Teil (lineare Gleichungen der Fuchsschen Klasse, hypergeometrische Differentialgleichung, Legendresche Polynome). Der dritte Abschnitt (partielle Differentialgleichungen erster Ordnung) bringt eine recht durchsichtige geometrische Theorie der Charakteristiken und der anschließenden Integrationsmethoden nebst der bekannten Anwendung in der Mechanik (Hamiltonsche Gleichungen) und die Elemente der Lieschen Transformationstheorie. Der vierte und letzte Abschnitt (partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung) enthält einmal das Wenige, was hier über die Charakteristikentheorie bekannt ist, und wendet sich dann den linearen Differentialgleichungen zu, wobei die elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Fälle in ihren wesentlichen Zügen behandelt werden und, wie gesagt, auch die in der Physik und Technik gebräuchlichen Methoden kurz zu ihrem Recht kommen. Natürlich kann ein allgemeines Lehrbuch von 319 Seiten nicht mit Rieman-Webers bekanntem Werk in Konkurrenz treten. Man findet aber z. B. die schönen Untersuchungen Courants über das asymptotische Verhalten der Eigenwerte der schwingenden Platte.

Diese außerordentliche Reichhaltigkeit des Buches bringt es freilich bei dem beschränkten Raume mit sich, daß der Verfasser manchmal genötigt ist, in den Stil des Referates überzugehen und die Beweise nur kurz anzudeuten, so daß der Leser auf die Originalliteratur oder auf eigene Arbeit angewiesen ist. Aber das ist doch im Anfange so geschickt gemacht, daß die Lesbarkeit des Buches nicht darunter leidet. Im Gegenteil, bei der Frische des Tones dieses mit Recht sich Lehrbuch nennenden Werkes besteht vielleicht eher die Gefahr, daß der Leser allzu gerne über die Beweise hinweggeht. Der Praktiker mag das ruhig tun, der Mathematiker muß sein Gewissen fragen.

Hier und da wird man auch etwas anders wünschen. So finde ich die Darstellung auf S. 154, 155 recht knapp und wenig durchsichtig. Ich würde die von Kneser (math. Ann. 58) vorziehen, der übrigens hier ebensowenig zitiert wird wie Liouville, der auch schon das asymptotische Verhalten der Eigenfunktionen gehabt hat. Ein Druckfehler, dem Mathematiker sofort erkennbar, aber sicher den Anfänger störend, zumal er in einem Bericht ohne Beweis steht, findet sich S. 182, wo Zeile 5 $m \longrightarrow \infty$ statt $z \longrightarrow \infty$ steht, so daß es aussieht, als wenn Convergenz und asymptotisches Verhalten verwechselt würden.

Das ist natürlich alles nicht von Belang und so sei dieses schöne, moderne und inhaltreiche Buch auch den Lesern dieser Zeitschrift angelegentlich empfohlen. Druck und Ausstattung sind gut, wie es sich beim Verlag Springer von selbst versteht.

Berlin. Hamel. 353

H. **ONNEN**, Sen. Dr., Haag (Holland). Kreisevolventen und ganze algebraische Funktionen. Mit 15 Abb. im Text. Mathematisch-physikalische Bibliothek. Herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting. Band. 51. Verlag von B. G. Teubner. Leipzig und Berlin 1923. 49 S.

Der Krümmungsradius ρ_n der n-ten Evolvente eines Kreises vom Radius r_0 läßt sich als ganze rationale Funktion n-ten Grades des Drehungswinkels w der Kreistangenten gegen eine Anfangslage ($w = 0$) darstellen:

$$\varrho_n = \frac{r_0}{n!} w^n + \frac{r_1}{(n-1)!} w^{n-1} + \ldots + \frac{r_{n-2}}{2!} w^2 + \frac{r_{n-1}}{1!} w + r_n,$$

wo r_λ die Länge von ϱ_λ für $w = 0$ bedeutet. Ist $\rho_n = 0$, so hat die n-te Kreisevolvente eine Spitze. Die Wurzeln einer algebraischen Gleichung n-ten Grades mit reellen Koeffizienten entsprechen daher den Rückkehrpunkten einer bestimmten n-ten Kreisevolvente. Der weiteren Verfolgung dieses Zusammenhanges ist das vorliegende Büchlein gewidmet. Es ergeben sich einige hübsche Beziehungen zur elementaren Algebra, z. B. zum Sturmschen Satze, auch eine zeichnerische Auflösung algebraischer Gleichungen nach ihren reellen Wurzeln; hierbei wird aber in praktischer Beziehung nicht viel gewonnen sein, da diese Methode zu wenig genau ist. R. Rothe.

Dipl.-Ing. FELIX **GOLDMANN**, Assistent a. d. Techn. Hochschule München. Anleitung zum Gebrauch des Zweiskalen- und Dreiskalen-Rechenschiebers. Mit kurzem Anhang über den Elektro-Schieber. Mit 8 Abb. im Text. Verlag von R. Oldenbourg. München und Berlin 1923. 30 S. Grundzahl geheftet 0,55 ℳ.

Die vorliegende Schrift enthält nichts Neues. Früher wurden solche Anleitungen beim Verkauf eines Rechenschiebers zugegeben. Man kommt praktisch auch ohne sie aus.

R. Rothe.

Dr.-Ing Dr. HANS **LORENZ**, Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule zu Danzig, Geh. Reg.-Rat. Einführung in die Elemente der höheren Mathematik und Mechanik. Für den Schulgebrauch und zum Selbstunterricht. Mit 126 in den Text ge-

druckten Abbildungen. Zweite verbesserte Auflage. Druck und Verlag von R. Oldenbourg. Berlin und München 1923. IV + 176 S.

Auf dieses Buch soll ausführlicher nur eingegangen werden, weil sein Verfasser der als Ingenieur und Mechaniker rühmlichst bekannte Danziger Professor ist. Denn wenn auch die Auswahl des Stoffes den erfahrenen Lehrer erkennen läßt — das Buch gehört, wenigstens hinsichtlich des mathematischen Hauptteils, doch in das Gefach der mathematischen Märchenbücher, in denen von Differentialen schlechthin als verschwindenden Koordinatendifferenzen (S. 64) erzählt wird, wo alle Potenzreihen konvergieren und durch sie beliebige Funktionen dargestellt werden können (S. 83 ff.), wo Grenzübergänge ohne weiteres vertauscht werden dürfen (z. B. S. 85), usw. usw. — Nun verweist zwar der Verfasser in der Vorrede »für eingehendere Studien, insbesondere eine strengere Begründung der vorgetragenen Lehren« auf andere Werke. Aber abgesehen davon, daß ein Schüler oder junger Studierender eine Vorrede nur selten liest, so trifft ein solcher Hinweis auch nicht den Kern der Sache. Hier handelt es sich nicht um eine mehr oder minder strenge Begründung, sondern einfach um Wahrheit oder Märchen. Ich fürchte, die Mehrzahl der Leser, für die das Buch bestimmt ist, werden doch die Märchen als bare Münze nehmen, und die anderen, die sie erkennen, werden sich vielleicht des Eindrucks nicht erwehren können, als ob der Verfasser selbst der gefährlichen Macht einiger dieser Märchen erlegen sei und sie schließlich für Wahrheit hält.

Indessen im Ernst: es ist wirklich nicht einzusehen, weshalb unseren doch im allgemeinen denkreifen Primanern jene veralteten, abgestandenen und mißverständlichen Dinge heute noch vorgesetzt werden, nachdem längst alle Zweifel aufgeklärt sind, und der Stoff in mehreren guten Schulbüchern so dargestellt ist, **wie es dem Verständnis der Primaner entspricht**

Auch sonst läßt das vorliegende Buch an vielen Stellen die Sorgfalt des Ausdrucks und der Darstellung vermissen, die bei mathematischen Gegenständen unerläßlich ist und bei einem für den Schulgebrauch bestimmten Buche besonders notwendig erscheint. Mehrfach werden die Begriffe der »Unbekannten« und der »Veränderlichen« durcheinander geworfen (S. 1 und S. 39); auf S. 11 genügt ein Punkt der Gleichung einer Geraden. Wiederholt wird von stetigen Kurven gesprochen, ohne daß irgendwo eine ausreichende Erklärung dafür gegeben wird. Man darf auch einen Flächenstreifen beliebig kleiner Breite nicht als Flächenelement, und eine Scheibe oder einen zylindrischen Ring beliebig kleiner Dicke nicht als Volumenelement bezeichnen, da hierunter etwas anderes verstanden werden muß, wenn nicht Verwirrung entstehen soll.

Die vorliegende zweite verbesserte Auflage stimmt, soweit ich habe feststellen können, mit der ersten vom Jahre 1910 buchstäblich überein, auch hinsichtlich der Druckfehler, nur daß auf S. 71 ein falsches Ergebnis einer Differentiationsaufgabe richtig gestellt und ein zweites in einer anderen Form dargestellt ist.

R. Rothe. 330

Dr. SIEGFRIED **VALENTINER,** Prof. für Physik an der Bergakademie Clausthal. Vektoranalysis. Mit 13 Abb.. Dritte, umgearbeitete Auflage. Sammlung Göschen. Vereinigung wissensch. Verleger. Berlin und Leipzig 1923. 132 S.

Das Bändchen ist 1907 neu herausgekommen. Die vorliegende dritte Auflage ist gegenüber der ersten an Umfang wohl mehr um der Kosten als um der Sache willen von 162 auf 132 Seiten oder fast 19 vH seines ursprünglichen Umfangs gekürzt worden. Der reiche Inhalt: Außer der elementaren Vektorrechnung selbst und Anwendungen auf Mechanik, Potential- und Elektrizitätstheorie auch ein Abriß über lineare Vektorfunktionen, Dyaden und Tensoren, wird durch eine äußerst knappe, stark formale Beweisführung erreicht. Dem Standpunkt des Verfassers als Physiker entsprechend tritt eine, ich möchte sagen, mehr pragmatische Form der Darstellung hervor. Eine solche auf die unmittelbare praktische Verwendung eingerichtete Darbietung der Grundlehren der Vektorrechnung ist an sich eher ein Vorzug als ein Fehler, sie kann nur durch Einseitigkeit des ins Auge gefaßten Zieles zur Schwäche werden. So fehlt denn in der Tat den meisten von Physikern geschriebenen Lehrbüchern über Vektoranalysis die rechte Beziehung zur Geometrie. Und gerade der erste Teil, welcher die Grundrechnungsregeln der Vektoralgebra und -analysis entwickelt — eine natürliche Unterteilung dieses beinahe die Hälfte des ganzen Umfanges einnehmenden Abschnitts in zwei Kapitel wäre erwünscht — läßt jede Anwendung auf analytische und Differentialgeometrie vermissen. Im Widerspruch hierzu steht dann die vom Verfasser vorangestellte, echt geometrische Unterscheischeidung zwischen polaren und axialen Vektoren, gewöhnliche und Pseudoskalaren, obwohl diese Differenzierung gerichteter und ungerichteter Größen in dem physikalisch orientierten Gibbsschen Vektorrechensystem, das von Valentiner zugrunde gelegt wird, völlig verschwindet. Erst jüngst hat F. Emde in einem beachtenswerten Aufsatz der Zeitschrift für Physik (Bd. 12, Heft 5 und Bd. 16 Heft 3) diese Angelegenheit klargelegt. Durch diesen Mangel hat die Harmonie des ganzen Werkes gelitten. Während im ersten Teil die vektoralgebraischen Grundoperationen (Addition, Subtraktion und die beiden Arten der Multiplikation) aus der Mechanik des starren Körpers hervorwachsen, treten nun gegenüber der rein formalen Vektorrechnung die Anwendungen fast ganz zurück. Diese, gegliedert nach den Gebieten: Potentialtheorie, Hydromechanik und Elektrizitätslehre, entsprechend den Potential-Solenoidalvektoren und ihrer Verknüpfung, füllen dann den zweiten Teil aus, während im dritten Teil die Ableitungen der wichtigsten Rechenregeln der Affinoranalysis mit ihren Anwendungen abwechseln.

An Einzelheiten möchte ich beanstanden: Die Definition des Vektors nach M. Abraham und A. Föppl. »Eine Größe soll Vektor genannt werden, wenn die Gesamtheit der verschiedenen Werte, die sie annehmen kann, in umkehrbar eindeutiger Weise der Gesamtheit der Strecken im Raum zugeordnet werden kann, die von einem willkürlich gewählten Anfangspunkt ausgehen« ist für sich genommen unzulänglich. Das Entscheidende liegt doch in den Verknüpfungsregeln oder Axiomen, denen die Vektoren unterworfen sind, also in erster Linie in ihrer geometrischen Addition. Deshalb ist auch die Begründung der momentanen Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers als Vektorgröße auf S. 62 verfehlt: »Da zu ihrer Bestimmung neben der Angabe des absoluten Betrages auch die Angabe der Richtung der Drehachse notwendig sei«. Sie könnte wörtlich z. B. auch auf die endlichen Drehungen des starren Körpers übertragen werden, obgleich diese zu den Affinoren gehören. Das »reziproke« Vektortripel hat aus dem schon eingangs erwähnten Mangel an analytisch-geometrischen Anwendungen im § 14 einen unglücklichen Platz. Ebenso erscheint mir der Hinweis S. 38 auf die linearen Vektorfunktionen verfrüht; dem Neuling müssen die Bemerkungen an dieser Stelle rätselhaft bleiben. Die Behandlung des Hamiltonschen Operators als symbolischer Vektor dürfte doch aus den Andeutungen im § 27 kaum verstanden werden. Auch sind die Formelsysteme desselben Paragraphen mit der doppelten Anwendung von ∇, **die aus entsprechenden mit einfachen** ∇ vermittelst Ersatz eines realen Vektors durch den **sympolischen ∇-Vektors folgen sollen, nicht ganz einwandfrei, z. B. (3') $\nabla(\nabla a) = \mathrm{grad\,div}\, a$** ist nichts weiter als eine andere Schreibweise desselben Ausdrucks. Die (3) entsprechende Formel lautet ganz anders. Endlich die Erklärung (S. 109): »Durch den Namen Tensor wird daran erinnert, daß, wie die Elastizitätstheorie lehrt, die Spannungen im elastischen Körper mit den Normalenrichtungen der Flächenelemente, auf die die Spannungen sich beziehen, in erster Annäherung durch eine symmetrische lineare Vektorfunktion zusammenhängen« bedeutet eine heillose Verwirrung des Hookeschen Elementargesetzes in der Elastizitätstheorie mit dem von jeder Hypothese über die Art des Mediums unabhängigen Spannungsbegriff!

Trotz solcher Ausstellungen vermag ich in dem besprochenem Werk eine für den Anfänger wohl geeignete erste Einführung in die Vektorrechnung und ein namentlich für den Physiker brauchbares Hilfsbüchlein zu erblicken.

Jena Winkelmann. 343

Ingenieur VOLLRAT **HAPPACH,** Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. In ihrer Anwendung auf Physik, Maschinenbau, Elektrotechnik und Geodäsie. Teubners Technische Leitfäden, Band 18. Verlag von B. G. Teubner. Leipzig und Berlin 1923. 74 S. Mit 7 Fig.

Dieses Büchlein ist aus der Praxis hervorgegangen, für die Praxis geschrieben. Den Rahmen bilden 63 Aufgaben, die verschiedenen Arbeitsgebieten entlehnt sind; sie erläutern den knappen Text, führen gleich in die numerische Rechnung ein, zeigen die Lösungen und ihren Ansatz und lassen keine vorangegangene theoretische Ableitung ohne Beispiel. Trotz oder wegen des geringen Umfanges enthält das Heft alles, was dem Manne der Praxis vorkommt. Zunächst wohl für den Ingenieur im engeren Sinne gedacht, bildet die Schrift eine gute Einführung für den angehenden Physiker, Astronomen und Geodäten. Er findet die Ausgleichung vermittelnder und bedingter Beobachtungen, die Konstantenbestimmung, und in einem Paragraphen wird auf die Ausgleichung periodischer Vorgänge (trigonometrische Reihen) in ihrer einfachen Form hingewiesen, ebenfalls mit durchgerechnetem Beispiel.

Die mathematischen Ableitungen sind lückenlos, klar und kurz gehalten und beschweren die Darstellung nicht; der letzte Abschnitt behandelt die Zulässigkeit der Anwendung der Meth. d. kl. Qu. und verschweigt nicht ihre Willkürlichkeit. An einigen Stellen fallen vielleicht dem Mathematiker schiefe Ausdrücke auf, sie tun der Brauchbarkeit des Taschenbuches keinen Abbruch. —

Zur Didaktik der Methode der kleinsten Quadrate mit den Hilfsmitteln der niederen Mathematik mag in diesem Zusammenhange noch hingewiesen werden auf die zu wenig beachtete originelle Schrift von K. Schwering, Lehrbuch der kleinsten Quadrate. Freiburg i. B. 1909, Herder. Wirtz. 323

Dr.-Ing. CARL **GEIBEL,** Ueber die Wasserrückkühlung mit selbstventilierendem Turmkühler. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 242. Verlag des Vereines deutscher Ingenieure. Berlin 1921. 98 S.

Der Verfasser hat die Gelegenheit, ausgedehnte und langwierige Versuche an einem besonders zu diesem Zweck erbauten Kühler auszuführen, in sehr dankenswerter Weise benützt, um neue Einblicke in die verwickelten Verhältnisse der Rückkühlung zu gewinnen und diese auch theoretisch zu verwerten.

Nach einer kritischen Beschreibung der bereits vorhandenen Arbeiten auf diesem Gebiete werden die zu beantwortenden Fragen formuliert. Im 2. Abschnitt wird der Versuchsbau beschrieben, ein kleiner Kühlturm, in dem zum Vergleich verschiedene Rieseleinbauten und Streudüsen angebracht wurden; hier werden auch die zum Teil originellen Meßeinrichtungen angegeben. Der 3. Abschnitt bringt die Versuchsergebnisse in einer Form, die den Einfluß der einzelnen Größen in übersichtlicher Weise zum Ausdruck bringt, im vierten Teil werden diese Ergebnisse in analytische Form gebracht und damit die einzelnen Einbauarten bei verschiedenen Verhältnissen verglichen, wobei manche neue und für die Praxis wichtige Bemerkungen gemacht werden.

Endlich folgt ein Vergleich mit früheren Ansichten, der mancherlei Unrichtigkeit aufdeckt, ferner ein wirtschaftlich bedeutungsvoller Abschnitt über die günstigste Wahl der Gattung und Größe des Kühlers.

Die Arbeit kann als Muster an Gründlichkeit in der Behandlung einer verwickelten technischen Aufgabe, der man rein theoretisch nicht beikommen kann, angesehen werden.

K. Körner.

NACHRICHTEN

August Föppl †. Kurz vor Redaktionsschluß trifft die Nachricht ein, daß das Mitglied unserer Schriftleitung Herr Geh. Hofrat und Professor an der Technischen Hochschule in München, August Föppl im 71. Lebensjahr verschieden ist. Eine Würdigung der Bedeutung und der Verdienste dieses ausgezeichneten Vertreters der technischen Mechanik soll iim nächsten Heft erfolgen.

Karl Wieghardt †. Am 11. Juni ist in Dresden der ordentliche Professor für technische Mechanik in der allgemeinen Abteilung der Technischen Hochschule, Dr. Karl Wieghardt, einem Herzleiden erlegen. In ihm verlieren die Technische Hochschule einen bewährten Lehrer, die Wissenschaft einen bedeutenden Forscher, die Dresdener Kollegen sowohl wie die vielen auswärtigen Fachgenossen, die ihm persönlich nahestanden, einen treuen Freund, unsere Zeitschrift einen geschätzten Mitarbeiter.

Karl Wieghardt wurde am 21. Juni 1874 zu Bergeborbeck bei Essen geboren, wo sein Vater Leiter einer Maschinenfabrik war; hier hat er nach Abschluß seiner Schulzeit praktisch gearbeitet, um sich dann auf Wunsch seines Vaters dem Studium des Maschinenbaues an der Technischen Hochschule in Hannover zuzuwenden. Er neigte jedoch stark zur Mathematik und den Naturwissenschaften, denen er sich auch endgültig widmete, als er im Herbst 1897 nach Göttingen übersiedelte. Hier stand sein Studium in erster Linie unter dem Einflusse von Felix Klein, wie seine ersten Arbeiten bezeugen, die zum Teil mit Klein zusammen verfaßt sind und auf Kleinschen Gedanken aufbauen. Nach der Promotion (1903) in Göttingen und einer zweijährigen Privatdozentenzeit (1904 bis 1906) in Aachen, wurde Wieghardt zuerst als Extraordinarius nach Braunschweig, dann (1907) als ordentlicher Professor für technische Mechanik nach Hannover berufen, von wo er (1913) nach Wien ging. In Dresden wirkte er seit 1920, doch nötigte ihn schon zwei Jahre später sein Herzleiden, seine Vorlesungen einzuschränken und schließlich aufzugeben.

Aus dem Gesamtgebiete der technischen Mechanik, dem seine Lehrtätigkeit galt, sind Wieghardts Arbeiten zumeist der Fachwerkstatik und der Elastizitätstheorie gewidmet.

Diese Arbeiten behandeln teils prinzipielle Fragen, zum größeren Teile aber praktische Probleme der Ingenieurmechanik. Von den ersteren möchte ich als ganz besonders eigenartig die Arbeit: »Ueber einen Grenzübergang der Elastizitätslehre und seine Anwendung auf die Statik hochgradig unbestimmter Fachwerke« nennen, in der gezeigt wird, daß der Spannungszustand in einem aus lauter gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzten, ebenen Fachwerke in den Spannungszustand einer ebenen Platte übergeht, wenn man bei abnehmender Länge ihrer Seiten die Zahl der Dreiecke ins unendliche wachsen läßt. Diese Untersuchung ist ein Vorläufer der Methoden, die uns heute aus der Lehre der linearen Gleichungen von unendlich vielen Variabeln bezw. der Integralgleichungen geläufig sind, und als solche von besonderem Interesse.

Es scheint mir aber, daß die charakteristische Eigenart der wissenschaftlichen Tätigkeit Wieghardts in den Arbeiten über praktische Probleme der Statik und Festigkeitslehre noch mehr in Erscheinung tritt, als in den erstgenannten. Zunächst befähigt ihn hier sein großes mathematisches Wissen, die theoretische Seite der Probleme einer erschöpfenden Lösung zuzuführen. Darüber hinaus wird er den Bedürfnissen der rechnenden Praxis dadurch gerecht, daß er seine Lösungen bis zur numerischen Behandlung durchführt, indem er über die Anforderungen der reinen Mathematik hinaus seine Ergebnisse nicht nur durch konvergente, sondern auch ausrechenbare Prozesse darstellt. (Vergl. z. B. »Ueber einige wirklich durchführbare Ansätze zur Berechnung von Spannungszuständen des elastischen Kreisringes«.) Zum dritten bemerken wir stets das Bestreben, die Näherungsannahmen, mit denen der Ingenieur seine Rechnungen vereinfacht, einerseits einer Kritik zu unterziehen, andererseits auch da, wo sie im allgemeinen Falle als nicht zutreffend nachgewiesen werden, sie insofern zu rechtfertigen, als ihre approximative Gültigkeit für die praktisch wichtigen Fälle untersucht, d. h. ihr Fehler abgeschätzt wird. — Wenn den Mathematiker hier die Exaktheit der Kritik erfreut, so wird den Ingenieur die Ehrenrettung seiner »falschen« Hilfsvorstellungen befriedigen. Diese vermittelnde Stellung zwischen der mathematischen Strenge und der rechnenden Praxis ist ein charakteristisches Hauptverdienst der Wieghardtschen Arbeiten. Wir finden deshalb Wieghardt auch als den berufenen Referenten für die spezielleren Ausführungen zur Theorie der Baukonstruktionen in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (IV. Bd., 2, 2, Heft 5).

Wenn die Wissenschaft mit dem Tode Wieghardts den Verlust eines jener wenigen be-

trauert, bei denen eine genaue Kenntnis der Ingenieurmechanik und ihrer Bedürfnisse mit einer umfassenden Kenntnis der Mathematik — auch ihrer dem angewandten Mathematiker weniger nahe liegenden Gebiete — Hand in Hand ging; so gesellt sich hierzu bei den Fachgenossen noch der Schmerz um den vortrefflichen Menschen. Das Andenken an diesen klugen, allseitig gebildeten und von Herzen gütigen Mann wird allen denen, die ihm nahe standen, über das schmerzliche Gefühl des Verlustes hinweg eine erhebende und freudige Erinnerung bleiben.

Verzeichnis der Wieghardtschen Arbeiten (soweit mir bekannt geworden).

1. Ueber die Statik ebener Fachwerke mit schlaffen Stäben, Dissertation Göttingen 1903.
2. F. Klein und K. Wieghardt, Ueber Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten. Archiv der Math. u. Phys. III. Reihe, Bd. 8, 1904, 1. Heft, S. 1.
3. Ueber einen Grenzübergang der Elastizitätstheorie und seine Anwendung auf die Statik hochgradig unbestimmter Fachwerke. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes, Berlin 1906.
4. Ueber die Nebenspannungen gewisser hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke. Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 53, 1906, S. 113.
5. Ueber das Spalten und Zerreißen elastischer Körper, ebenda. Bd. 55, 1907, S. 60.
6. Ueber Spannungsverteilungen in Balken aus Eisenbeton, ebenda. Bd. 56, 1908, S. 119.
7. Ueber ein neues Verfahren, verwickelte Spannungsverteilungen in elastischen Körpern auf experimentellem Wege zu finden. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, 1905 und 1906.
8. Theorie der Baukonstruktionen II. Speziellere Ausführungen. Enzyklopädie der math. Wissensch. IV. Bd., 2, 2, Heft 5.
9. Ueber einige wirklich durchführbare Ansätze zur Berechnung von Spannungszuständen des elastischen Kreisringes. Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Math. naturw. Klasse, Abt. IIA, Bd. 124, Heft 10, Wien 1915.
10. Ueber einige einfache, aber wenig bekannte Sätze aus der Fachwerkstatik, Archiv der Math. u. Phys. III. Reihe, Bd. 23, Heft 4, S. 308 und Bd. 24, Heft 1, S. 24, 1915.
11. Ueber den Balken auf nachgiebiger Unterlage, diese Zeitschr. Bd. 2, 1922, Heft 3, S. 165.

Dresden. E. Trefftz. 436

Mechanik-Kongreß in Zürich. Zu der in Heft 3, S. 276 gebrachten Nachricht ist nachzutragen, daß auch Herr Prof. Meißner-Zürich dem Komitee angehört, das die Vorarbeiten für den nächsten internationalen Kongreß in Zürich übernommen hat.

Herbstversammlung in Innsbruck September 1924. Im Rahmen der 88. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte findet in der dritten Septemberwoche die Jahresversammlung der »Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik« statt. Bisher sind folgende Vorträge angemeldet:

H. Alt-Dresden: Einige technisch wichtige Fragestellungen über die Tottagen des Gelenkviereckes.
E. Böhmer-Dresden: Ueber die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
P. Funk-Prag: Thema vorbehalten.
W. Lorey-Leipzig: Was versteht man unter mathematischer Statistik?
R. Mehmke-Stuttgart: Ueber neue Anwendungen von Brauers logarithmischem Zirkel.
E. Melan-Prag: Anwendung partieller Differenzengleichungen zur Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme.
H. Pollaczek-Geiringer-Berlin: Ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Problem der Strahlung.
E. Schwerin-Berlin: Die Stabilität rotierender, axial belasteter Wellen.
P. Riebesell-Hamburg: Die Bedeutung der mathematischen Statistik für neuere Formen der Feuerversicherung.
H. Wagner-Berlin: Ueber die Entstehung des Tragflügelauftriebes.

Die Vorträge werden auf drei Sitzungen, die Donnerstag, den 25. September, nachm. und Freitag, den 26. September, vorm. und nachm. stattfinden, verteilt. Diese drei Sitzungen sind gemeinsam mit der Sektion 1 des Naturforschertages und mit der Jahresversammlung der deutschen Mathematikervereinigung. Ueber alle Einzelheiten gibt das Programm näher Aufschluß, das diesem Heft vorangestellt ist und an alle Mitglieder versandt wird.

Die Geschäftssitzung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik ist für Donnerstag abend anberaumt.

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Entsprechend den Beschlüssen der Marburger Hauptversammlung wurde Dr. O. Mader, vom Forschungsinstitut Prof. Junkers in Dessau, in den wissenschaftlichen Ausschuß kooptiert. 452

(Redaktionsschluß 31. August 1924.)

Verantwortlich: für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43; für den Anzeigenteil Fritz Noack, Berlin-Niederschönhausen.
VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin. — Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.